UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Gabarito da Segunda Prova Unificada de Cálculo IV - 2025/2, 13/11/2025

Questão 1: (2,5 pontos) Determine todos os valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ (e todas as soluções correspondentes), para os quais existem soluções não-nulas do problema de valor de contorno:

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0.$$

Solução:
Procuramos por soluções da forma $y(x) = e^{rx}$. Logo $y'(x) = re^{rx}$ e $y''(x) = r^2 e^{rx}$. Sustituindo na equação

$$y'' + \lambda y = 0 \tag{1}$$

obtemos $e^{rx}(x^2 + \lambda) = 0$.

O polinômio característico é $r^2 + \lambda = 0$.

Se $\lambda > 0$ temos que $r = \pm\sqrt{\lambda}i$. A solução geral será

$$y(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Então $y'(x) = -c_1\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}x) + c_2\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}x)$. Substituindo nas condições de contorno concluímos que $c_2 = 0$ e $\lambda = k^2$, $k = 1, 2, \ldots$ caso contrário a solução seria nula. Logo

$$y(x) = c_1 \cos(kx), \quad k = 1, 2, 3, ...$$

Se $\lambda < 0$ então $r = \pm\sqrt{\lambda}$ e a solução geral será

$$y(x) = c_1 e^{-\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{\sqrt{\lambda}x}.$$

Então $y'(x) = -c_1\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}x} + c_2\sqrt{\lambda}e^{\sqrt{\lambda}x}$. Substituindo nas condições de contorno concluímos que $c_2 = c_1 = 0$ e portanto neste caso, a solução será nula.

Se $\lambda = 0$ segue que $y(x) = c_1 x + c_2$, $y'(x) = c_1$. Substituindo nas condições de contorno segue que $c_1 = 0$. Logo $y(x) = c_2$, $c_2 \neq 0$.

Portanto $\lambda = k^2$ e $y(x) = c\cos(kx)$, com $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ e $c \neq 0$.

Questão 2: (2,5 pontos) Seja $f(x)$ uma função periódica de período $2M$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} M + x, & \text{se } -M \leq x < 0, \\ M - x, & \text{se } \quad 0 \leq x \leq M. \end{cases}$$

(a) Determine a expansão em série de Fourier de $f(x)$.

(b) Usando o Teorema de Fourier e calculando a série obtida no item anterior em $x = 0$, mostre que
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Solução:
a) Uma vez que $f(x)$ é periódica de período $2M$, sua série de Fourier é dada por

$$\mathrm{SF}(f(x)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{M}\right) + b_n \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{M}\right),$$

onde os coeficientes da série são dados por

$$a_0 = \frac{1}{M}\int_{-M}^{M} f(x)dx,\ a_n = \frac{1}{M}\int_{-M}^{M} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{M}\right)dx,\ b_n = \frac{1}{M}\int_{-M}^{M} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{M}\right)dx.$$

Observamos que $f(x)$ é uma função par. De fato, se $x > 0$, então $f(-x) = M - x = f(x)$. Assim, podemos concluir sem cálculos que $b_n = 0$, para todo $n \geq 1$.
Uma vez que $f(x)$ é par, o coeficiente a_0 é dado por

$$a_0 = \frac{1}{M}\int_{-M}^{M} f(x)dx = \frac{2}{M}\int_{0}^{M} f(x)dx = \frac{2}{M}\int_{0}^{M} (M-x)dx.$$

Efetuando a integração:

$$a_0 = \frac{2}{M}\left[Mx - \frac{x^2}{2}\right]_0^M = \frac{2}{M}\left(M^2 - \frac{M^2}{2}\right) = \frac{2}{M}\cdot\frac{M^2}{2} = M.$$

Para o cálculo de $a_n,\ n \geq 1$, sendo $f(x)$ par, escrevemos

$$a_n = \frac{1}{M}\int_{-M}^{M} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{M}\right)dx = \frac{2}{M}\int_{0}^{M} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{M}\right)dx \text{ para todo } n \geq 1.$$

Assim, obtemos

$$a_n = \frac{2}{M}\int_{0}^{M} (M-x)\cos\left(\frac{n\pi x}{M}\right)dx = \frac{2}{M}\int_{0}^{M} M\cos\left(\frac{n\pi x}{M}\right)dx - \frac{2}{M}\int_{0}^{M} x\cos\left(\frac{n\pi x}{M}\right)dx$$

Note que, usando a substituição $u = \dfrac{n\pi x}{M}$, as duas integrais que aparecem acima podem ser escritas como:

$$\int_{0}^{M} \cos\left(\frac{n\pi x}{M}\right)dx = \frac{M}{n\pi}\int_{0}^{n\pi} \cos(u)du.$$

$$\int_{0}^{M} x\cos\left(\frac{n\pi x}{M}\right)dx = \frac{M^2}{n^2\pi^2}\int_{0}^{n\pi} u\cos(u)du.$$

Note agora que

$$
\begin{aligned}
\int_0^{n\pi} \cos(u)\,du &= [\sin(u)]_0^{n\pi} \\
&= \sin(n\pi) - \sin(0) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Usando integração por partes, também temos que

$$
\begin{aligned}
\int_0^{n\pi} u\cos(u)\,du &= [u\sin(u)]_0^{n\pi} - \int_0^{n\pi} \sin(u)\,du \\
&= [u\sin(u) + \cos(u)]_0^{n\pi} \\
&= \cos(n\pi) - 1 \\
&= (-1)^n - 1.
\end{aligned}
$$

Voltando para a_n, usando os resultados das duas integrais acima, obtemos que

$$a_n = \frac{-2M}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right) = \frac{2M}{n^2\pi^2}(1 + (-1)^{n+1}).$$

Portanto, a série de Fourier de $f(x)$ é dada por

$$\mathrm{SF}(f(x)) = \frac{M}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2M}{n^2\pi^2}\left(1 + (-1)^{n+1}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{M}\right).$$

b) Observe inicialmente que $f(x)$ é uma função contínua. Portanto, o Teorema de Fourier nos permite escrever

$$f(x) = \mathrm{SF}(f(x)) = \frac{M}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2M}{n^2\pi^2}\left(1 + (-1)^{n+1}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{M}\right)$$

Calculando a expressão acima para $x = 0$, obtemos

$$M = f(0) = \frac{M}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2M}{n^2\pi^2}\left(1 + (-1)^{n+1}\right),$$

onde

$$\frac{\pi^2}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^{n+1}}{n^2}.$$

Para deixar a série como no enunciado do problema, observamos que se $n = 2k$, $k = 1, 2, \ldots$, é par, então $(-1)^{n+1} + 1 = (-1)^{2k+1} + 1 = -1 + 1 = 0$. Logo, a série não possui termos pares. Por outro lado, se $n = 2k - 1$, $k = 1, 2, \ldots$, é ímpar, então $(-1)^{n+1} + 1 = (-1)^{2k} + 1 = 1 + 1 = 2$.

Concluímos então que a série só possui termos ímpares. Fazendo $n = 2k-1$, obtemos

$$\frac{\pi^2}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)^2},$$

e portanto,

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2},$$

como queríamos.

Questão 3: (2,5 pontos) Considere o seguinte problema de valor inicial e de contorno para a equação do calor:

$$\begin{cases} u_t = 2u_{xx}, & 0 < x < 4,\ t > 0, \\ u(0,t) = 20, & t > 0, \\ u(4,t) = 10, & t > 0, \\ u(x,0) = 20 - \frac{5}{2}x + \sin(2\pi x), & 0 < x < 4. \end{cases}$$

(a) Determine a distribuição de temperatura estado estacionário $v(x)$.

(b) Defina $w(x,t) = u(x,t) - v(x)$. Mostre que $w(x,t)$ satisfaz um problema de valor inicial e de contorno com condições de contorno homogêneas e determine este novo problema.

(c) Usando o método de separação de variáveis, determine a solução $w(x,t)$ do problema formulado no item (b) e, consequentemente, a solução $u(x,t)$ do problema original.

Solução:

- (a) A distribuição de temperatura estado estacionário $v(x)$ não depende do tempo ($v_t = 0$). A EDP $u_t = 2u_{xx}$ torna-se $0 = 2v_{xx}$, ou seja:

  $$v''(x) = 0.$$

  As condições de contorno são as do problema original:

  $$v(0) = 20, \qquad v(4) = 10.$$

  Integrando $v''(x) = 0$ duas vezes, obtemos a forma geral $v(x) = C_1 x + C_2$. Aplicamos as condições de contorno para achar C_1 e C_2:

  * $v(0) = 20 \implies C_1(0) + C_2 = 20 \implies C_2 = 20.$
  * $v(4) = 10 \implies C_1(4) + C_2 = 10 \implies 4C_1 + 20 = 10.$
  * $4C_1 = -10 \implies C_1 = -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2}.$

Portanto, a distribuição de temperatura estado estacionário é:

$$v(x) = 20 - \frac{5}{2}x.$$

– (b) Definimos a distribuição transiente como $w(x,t) = u(x,t) - v(x)$. Calculamos as derivadas de w:

  * $w_t = u_t - (v(x))_t = u_t$
  * $w_{xx} = u_{xx} - v''(x) = u_{xx} - 0 = u_{xx}$

  Substituindo na EDP original ($u_t = 2u_{xx}$), obtemos a EDP para w:

$$w_t = 2w_{xx}.$$

  As novas condições de contorno são homogêneas:

  * $w(0,t) = u(0,t) - v(0) = 20 - 20 = 0$
  * $w(4,t) = u(4,t) - v(4) = 10 - 10 = 0$

  E a nova condição inicial é:

$$w(x,0) = u(x,0) - v(x) = 20 - \frac{5}{2}x + \sin(2\pi x) - \left(20 - \frac{5}{2}x\right)$$

$$w(x,0) = \sin(2\pi x).$$

  O problema para w é:

$$\begin{cases} w_t = 2w_{xx}, & 0 < x < 4,\ t > 0, \\ w(0,t) = 0,\ w(4,t) = 0, & t > 0, \\ w(x,0) = \sin(2\pi x), & 0 \le x \le 4. \end{cases}$$

– (c) Procuramos $w(x,t) = X(x)T(t)$. Substituindo na equação:

$$X(x)T'(t) = 2X''(x)T(t).$$

  Separando variáveis obtemos:

$$\frac{T'(t)}{2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

  Logo:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ T' + 2\lambda T = 0. \end{cases}$$

  O problema

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X(0) = X(4) = 0. \end{cases}$$

  tem autofunções $X_n(x) = \sin(\frac{n\pi x}{4})$ e autovalores $\lambda_n = (\frac{n\pi}{L})^2 = (\frac{n\pi}{4})^2 = \frac{n^2\pi^2}{16}$.

A equação $T' + 2\frac{n^2\pi^2}{16}T = 0$ tem por solução

$$T_n(t) = C_n e^{-2\frac{n^2\pi^2}{16}t} = C_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{8}t}.$$

A solução geral para o problema é:

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{8}t\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{4}\right).$$

Aplicamos a condição inicial $w(x,0) = \sin(2\pi x)$:

$$w(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{4}\right) = \sin(2\pi x).$$

Para que a igualdade seja verdadeira, por ortogonalidade (ou simples inspeção), devemos encontrar o n que torna os argumentos dos senos iguais:

$$\frac{n\pi x}{4} = 2\pi x \implies \frac{n}{4} = 2 \implies n = 8.$$

A condição inicial é exatamente a 8ª autofunção. Portanto, o único coeficiente não nulo da série de Fourier é $b_8 = 1$, e $b_n = 0$ para todo $n \neq 8$.
A solução para w é apenas o termo $n = 8$ da série:

$$w(x,t) = 1 \cdot \exp\left(-\frac{8^2\pi^2}{8}t\right)\sin\left(\frac{8\pi x}{4}\right)$$

$$w(x,t) = e^{-8\pi^2 t}\sin(2\pi x).$$

Finalmente, somamos a distribuição de temperatura estado estacionário e a distribuição transiente:

$$u(x,t) = v(x) + w(x,t)$$

$$u(x,t) = 20 - \frac{5}{2}x + e^{-8\pi^2 t}\sin(2\pi x)$$

Questão 4: (2.5 pontos) Encontre todas as soluções não nulas u da forma $u(x,y) = X(x)Y(y)$ da equação:

$$u_x + u_y = (x^2 - y^2)u.$$

Solução
Queremos encontrar todas as soluções u da forma $u(x,y) = X(x)Y(y)$ da equação diferencial parcial:

$$u_x + u_y = (x^2 - y^2)u.$$

Como

$$u_x = X'(x)Y(y), \qquad u_y = X(x)Y'(y),$$

temos:

$$X'(x)Y(y) + X(x)Y'(y) = (x^2 - y^2)X(x)Y(y).$$

Dividindo ambos os lados por $X(x)Y(y)$ (supondo $X, Y \neq 0$):

$$\frac{X'(x)}{X(x)} + \frac{Y'(y)}{Y(y)} = x^2 - y^2.$$

Separando variavéis:

$$\frac{X'(x)}{X(x)} - x^2 = -\left(\frac{Y'(y)}{Y(y)} + y^2\right).$$

O lado esquerdo depende apenas de x, e o lado direito apenas de y. Portanto, ambos devem ser iguais a uma constante real λ, a constante de separação:

$$\frac{X'(x)}{X(x)} - x^2 = \lambda, \qquad -\left(\frac{Y'(y)}{Y(y)} + y^2\right) = \lambda.$$

Resolvendo as equações diferenciais ordinárias

$$\frac{X'(x)}{X(x)} = x^2 + \lambda.$$

Integrando:

$$\ln\left(X(x)\right) = \int (x^2 + \lambda)\, dx = \frac{x^3}{3} + \lambda x + C_1.$$

Logo,

$$X(x) = Ae^{\frac{x^3}{3} + \lambda x},$$

onde $A = e^{C_1}$.

Da segunda equação:

$$\frac{Y'(y)}{Y(y)} = -y^2 - \lambda.$$

Integrando:

$$\ln\left(Y(y)\right) = \int (-y^2 - \lambda)\, dy = -\frac{y^3}{3} - \lambda y + C_2.$$

Portanto,

$$Y(y) = Be^{-\frac{y^3}{3} - \lambda y},$$

onde $B = e^{C_2}$.

Multiplicando $X(x)$ e $Y(y)$:

$$u(x,y) = X(x)Y(y) = AB\, e^{\frac{x^3}{3} + \lambda x - \frac{y^3}{3} - \lambda y}.$$

Colocando $K = AB$, obtemos:

$$u(x,y) = K\, e^{\left(\frac{x^3 - y^3}{3} + \lambda(x-y)\right)}, \quad K, \lambda \in \mathbb{R}, K \neq 0.$$

FÓRMULAS ÚTEIS NO VERSO!

A. Tabela resumo para EDO $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$ de segunda ordem com coeficientes constantes:

$$\begin{aligned}
r_1, r_2 \in \mathbb{R} \ \text{ e } \ r_1 \neq r_2 &\implies y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}. \\
r_1, r_2 \in \mathbb{R} \ \text{ e } \ r_1 = r_2 &\implies y(x) = (c_1 + c_2 x)\, e^{r_1 x}. \\
r_1 = \alpha + \beta i \ \text{ e } \ r_2 = \alpha - \beta i &\implies y(x) = e^{\alpha x} \left(c_1 \cos(\beta x) + c_2 \operatorname{sen}(\beta x) \right),
\end{aligned}$$

onde r_1 e r_2 são as raízes da equação característica $ar^2 + br + c = 0$.

B. O problema

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \\ y(0) = 0, y(L) = 0, \end{cases}$$

tem autovalores $\lambda = n^2\pi^2/L^2$, $n \in \{1, 2, 3, ...\}$, e as autofunções correspondentes são

$$y_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$