



Gabarito da Primeira Prova Unificada de Cálculo IV - 2025/2, 02/10/2025

Questão 1: (2,5 pontos)

- (a) Estude a convergência, convergência absoluta ou divergência de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \sin(4n)}{4^n}$.
- (b) Determine o raio de convergência da série de potências $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k+1)!}{(2k)!} x^{2k}$.
- (c) A série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k^2}{(2k+1)(k+3)}$ é convergente ou divergente? Justifique.

Solução:

a) Como $|\sin(4n)| \leq 1$ temos que

$$\left| \frac{3^n \sin(4n)}{4^n} \right| \leq \left| \left(\frac{3}{4} \right)^n \right|.$$

Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^n$ é convergente, pois é série geométrica com razão $\frac{3}{4} < 1$, segue pelo teste da comparação que a série dada é absolutamente convergente.

b) Considere $a_k = \frac{(2k+1)!}{(2k)!} x^{2k}$. Vamos aplicar o Teste da Razão. Observe que

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \left| \frac{(2k+3)! x^{2k+2}}{(2k+2)! x^{2k} (2k+1)!} \right| = \frac{(2k+3)}{(2k+1)} |x|^2.$$

Aplicando a regra de L'Hôpital obtemos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = |x|^2.$$

Como $|x|^2 < 1$ sempre que $|x| < 1$, segue do Teste da Razão que o raio de convergência desta série será 1.

c) Seja $a_k = \frac{(-1)^k k^2}{(2k+1)(k+3)}$ e $b_k = \frac{k^2}{(2k+1)(k+3)}$. Aplicando duas vezes a Regra de L'Hôpital temos que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^2}{(2k+1)(k+3)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2k}{4k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{4} = 1/2 \neq 0.$$

Segue que $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k \neq 0$ (de fato, não existe). Portanto pelo teste da divergência, podemos concluir que a série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k^2}{(2k+1)(k+3)}$ é divergente.

Questão 2: (2,5 pontos) Considere a função

$$f(x) = \int_0^x \frac{\cos(2t) - 1}{t} dt.$$

- a) Expresse $f(x)$ como uma série de Taylor centrada em $x = 0$.
- b) Calcule $f^{(8)}(0)$, isto é, a derivada de oitava ordem de $f(x)$ calculada em 0.

Solução:

a) Lembramos que $\cos t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}$. Logo, obtemos $\cos(2t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n t^{2n}}{(2n)!}$.

Segue que

$$\begin{aligned}\cos(2t) - 1 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n t^{2n}}{(2n)!} \\ \frac{\cos(2t) - 1}{t} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n t^{2n-1}}{(2n)!}.\end{aligned}$$

Para achar $f(x)$ podemos integrar a série anterior termo a termo. Segue então que

$$\begin{aligned}f(x) &= \int_0^x \frac{\cos(2t) - 1}{t} dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n t^{2n-1}}{(2n)!} dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{(2n)!} \int_0^x t^{2n-1} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{(2n)!} \frac{x^{2n}}{(2n)}.\end{aligned}$$

Assim, a expressão de $f(x)$ como série de Taylor centrada em 0 é dada por:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{(2n)(2n)!} x^{2n}.$$

b) Lembramos que expansão em série de Taylor de uma função $f(x)$ centrada na origem é dada por $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, onde $c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$. Segue que $c_8 = \frac{f^{(8)}(0)}{8!}$. No nosso caso, temos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{(2n)(2n)!} x^{2n}.$$

Se $2n = 8$, temos $n = 4$. Logo,

$$\frac{f^{(8)}(0)}{8!} = \frac{(-1)^4 4^4}{(2 \cdot 4)(2 \cdot 4)!}.$$

Segue que

$$f^{(8)}(0) = 32.$$

Questão 3: (2,5 pontos) Considere a equação diferencial ordinária:

$$x^2 y'' - xy' + xy = 0.$$

- a) Demonstre que $x = 0$ é um ponto singular regular dessa equação.

- b) Determine a relação de recorrência entre os coeficientes c_n da solução em série potências em torno de $x = 0$ associada à **maior das duas raízes** da equação indicial.
- c) Calcule os quatro primeiros coeficientes desta série quando $c_0 = 1$.

Solução:

a) A equação é

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0,$$

onde $P(x) = x^2$, $Q(x) = -x$ e $R(x) = x$. Como $P(0) = 0$, segue que $x = 0$ é ponto singular da equação.

Verificamos se é um ponto singular regular:

$$p_0 = \lim_{x \rightarrow 0} (x-0) \frac{Q(x)}{P(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} x \left(-\frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} (-1) = -1$$

$$q_0 = \lim_{x \rightarrow 0} (x-0)^2 \frac{R(x)}{P(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \left(\frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} (x) = 0$$

Como os limites p_0 e q_0 existem e são finitos, segue que $x = 0$ é ponto singular regular da equação.

b) Aplicamos o Método de Frobenius, assumindo uma solução da forma:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$$

Calculamos as derivadas de $y(x)$:

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) c_n x^{n+r-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) c_n x^{n+r-2}$$

Substituindo na EDO original $x^2 y'' - x y' + x y = 0$:

$$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) c_n x^{n+r-2} - x \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) c_n x^{n+r-1} + x \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0$$

Simplificando os termos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) c_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) c_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r+1} = 0$$

Agrupando os dois primeiros somatórios e fatorando $(n+r)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-2) c_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r+1} = 0$$

Para combinar os somatórios, reindexamos o segundo. Seja $k = n+1 \implies n = k-1$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-2)c_n x^{n+r} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1} x^{k+r} = 0$$

Separando o termo $n = 0$ do primeiro somatório para unificar os índices:

$$(0+r)(0+r-2)c_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty} (n+r)(n+r-2)c_n x^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^{n+r} = 0$$

$$r(r-2)c_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+r)(n+r-2)c_n + c_{n-1}] x^{n+r} = 0$$

Daqui, obtemos a **equação indicial** (igualando o coeficiente do termo de menor potência a zero, com $c_0 \neq 0$):

$$r(r-2) = 0 \implies r_1 = 2, \quad r_2 = 0$$

E a **relação de recorrência** (igualando o termo geral do somatório a zero):

$$(n+r)(n+r-2)c_n + c_{n-1} = 0 \implies c_n = -\frac{c_{n-1}}{(n+r)(n+r-2)}$$

Utilizamos a maior raiz, $r = 2$, na relação de recorrência:

$$c_n = -\frac{c_{n-1}}{(n+2)(n+2-2)} = -\frac{c_{n-1}}{n(n+2)}, \quad \text{para } n \geq 1$$

c) Calculamos os primeiros quatro coeficientes em termos de $c_0 = 1$:

$$\begin{aligned} - n = 1 : \quad c_1 &= -\frac{c_0}{1(1+2)} = -\frac{c_0}{3} = -\frac{1}{3}. \\ - n = 2 : \quad c_2 &= -\frac{c_1}{2(2+2)} = -\frac{c_1}{8} = \frac{c_0}{24} = \frac{1}{24}. \\ - n = 3 : \quad c_3 &= -\frac{c_2}{3(3+2)} = -\frac{c_2}{15} = -\frac{c_0}{360} = -\frac{1}{360}. \\ - n = 4 : \quad c_4 &= -\frac{c_3}{4(4+2)} = -\frac{c_3}{24} = \frac{c_0}{8640} = \frac{1}{8640}. \end{aligned}$$

Questão 4: (2.5 pontos) Utilize a transformada de Laplace para determinar a solução do seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + y = g(t) \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \end{cases}$$

$$\text{onde } g \text{ é a função } g(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ e^{t-1} & \text{se } 1 \leq t \end{cases}$$

Solução

Observe que a função $g(t)$ pode ser escrita usando a função degrau unitário $u_1(t)$, isto é, $g(t) = u_1(t)e^{t-1}$. Logo a equação fica:

$$y'' + y = u_1(t)e^{t-1}.$$

Aplicando a Transformada de Laplace em ambos lados da equação,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{y'' + y\}(s) &= \mathcal{L}\{u_1(t)e^{t-1}\}(s), \\ s^2\mathcal{L}\{y\}(s) - sy(0) - y'(0) + \mathcal{L}\{y\}(s) &= \frac{e^{-s}}{s-1}, \\ (s^2 + 1)\mathcal{L}\{y\}(s) &= 1 + \frac{e^{-s}}{s-1}, \\ \mathcal{L}\{y\}(s) &= \frac{1}{(s^2 + 1)} + e^{-s} \frac{1}{(s-1)(s^2 + 1)}\end{aligned}$$

Usando o método de frações simples obtemos:

$$\frac{1}{(s-1)(s^2 + 1)} = \frac{\frac{1}{2}}{s-1} - \frac{\frac{1}{2}(s+1)}{s^2 + 1}.$$

Logo temos que:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{y\}(s) &= \frac{1}{(s^2 + 1)} + \frac{1}{2}e^{-s} \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}e^{-s} \frac{(s+1)}{(s^2 + 1)}, \\ \mathcal{L}\{y\}(s) &= \frac{1}{(s^2 + 1)} + \frac{1}{2}e^{-s} \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}e^{-s} \frac{s}{(s^2 + 1)} - \frac{1}{2}e^{-s} \frac{1}{(s^2 + 1)}.\end{aligned}$$

Aplicando a Transformada Inversa de Laplace obtemos que:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2 + 1)}\right\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-s} \frac{1}{s-1}\right\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-s} \frac{s}{(s^2 + 1)}\right\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-s} \frac{1}{(s^2 + 1)}\right\}.$$

Usando a tabela de transformadas, obtemos finalmente que:

$$y(t) = \text{sen}(t) + \frac{1}{2}u_1(t)e^{t-1} - \frac{1}{2}u_1(t)\cos(t-1) - \frac{1}{2}u_1(t)\text{sen}(t-1).$$

FÓRMULAS ÚTEIS NO VERSO!

Transformadas de Laplace elementares.

f	$\mathcal{L}[f]$
1	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$
$t^m \quad (m \in \mathbb{N})$	$\frac{m!}{s^{m+1}}, \quad s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \quad s > a$
$t^m e^{at} \quad (m \in \mathbb{N})$	$\frac{m!}{(s-a)^{m+1}}, \quad s > a$
$\text{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$
$e^{at} \text{sen}(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}, \quad s > a$
$e^{at} \cos(bt)$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2 + b^2}, \quad s > a$
$\text{senh}(at)$	$\frac{a}{s^2 - a^2}, \quad s > a $
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2 - a^2}, \quad s > a $
$\delta(t-a)$	e^{-as}
$u_a(t)f(t-a)$	$e^{-as} \mathcal{L}[f](s)$
$e^{at} f$	$\mathcal{L}[f](s-a)$
$f^{(m)}(t)$	$s^m \mathcal{L}[f](s) - s^{m-1} f(0) - \dots - f^{(m-1)}(0)$