UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Gabarito da Prova Final Unificada de Cálculo IV - 2017/1, 20/06/2017

Questão 1: Considere a equação

$$y'' - xy' - y = 0.$$

(a) Mostre que $x = 0$ é ponto ordinário dessa equação.
Solução:
A equação é da forma $P(x)y'' + R(x)y' + Q(x)y = 0$ com $P(x) = 1$. Como $P(0) = 1 \neq 0$ então $x = 0$ é ponto ordinário.

(b) Determine a relação de recorrência dos coeficientes da solução em série dessa equação em torno do ponto $x = 0$.
Solução:
Procuramos solução da forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Daí

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) n a_n x^{n-2}.$$

Substituindo na equação:

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-1) n a_n x^{n-2} - x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

Reindexando a primeira parcela ($m = n - 2$):

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1) a_{m+2} x^m - \sum_{m=0}^{\infty} m a_m x^m - \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = 0$$

Evidenciando x^m:

$$\sum_{m=0}^{\infty} [(m+2)(m+1) a_{m+2} - (m+1) a_m] x^m = 0.$$

Logo, a recorrência é:

$$a_{m+2} = \frac{m+1}{(m+2)(m+1)} a_m = \frac{1}{(m+2)} a_m$$

(c) Determine os primeiros quatro termos não nulos da solução $y(x)$ que satisfaz $y(0) = 2$ e $y'(0) = 0$.
Solução:
Como $y'(0) = a_1 = 0$, temos que $a_m = 0$ para todo m ímpar. Como $y(0) = 2$, temos

$$a_0 = 2; \qquad a_2 = \frac{1}{2}a_0 = 1; \qquad a_4 = \frac{1}{4}a_2 = \frac{1}{4}; \qquad a_6 = \frac{1}{6}a_4 = \frac{1}{24}.$$

Questão 2: Encontre γ de modo que a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} x^2y'' - 2y = 0, \\ y(1) = 1, \ y'(1) = \gamma, \end{cases}$$

tende a zero quando x tende a zero.
solução:
Identificamos que a equação anterior é uma equação de Euler, com $\alpha = 0$ e $\beta = -2$, por tanto a equação quadrática associada é $r(r-1) - 2 = 0$, que tem como raízes $r_1 = 2$ e $r_2 = -1$, as quais são reais diferentes, por tanto a solução geral do problema é da forma

$$y(x) = c_1|x|^{-1} + c_2|x|^2.$$

Como queremos soluções tal que $\lim_{x\to 0} y(x) = 0$, então deve ser $c_1 = 0$ pois $\lim_{x\to 0} |x|^{-1} = +\infty$, por tanto a solução geral então tem a forma $y(x) = c_2|x|^2$. As condições iniciais do problema nos dão que $c_2 = y(1) = 1$ e $2c_2 = y'(1) = \gamma$, o seja $\gamma = 2$.

Questão 3: Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = \cos(t)\, u_\pi(t) \\ y(0) = 1, \ y'(0) = -1, \end{cases}$$

onde u_π é a função degrau unitário com descontinuidade em $t = \pi$.
Solução
Usando o método da transformada de Laplace obtemos

$$\mathcal{L}[y'']+2\mathcal{L}[y']+2\mathcal{L}[y] = -y'(0)-sy(0)+s^2Y(s)+2sY(s)-2y(0)+2Y(s) = -e^{-\pi s}\frac{s}{s^2+1}+s+1,$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+2s+2}\left(-e^{-\pi s}\frac{s}{s^2+1} + s + 1\right).$$

Onde usamos a tabela e o fato que $\cos(t) = -cos(t-\pi)$.
Note que $s^2 + 2s + 2 = (s+1)^2 + 1$. Logo

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right] = e^{-t}\cos(t). \tag{1}$$ Eq:1

Pelo Cálculo I (decomposição em frações parciais) é fácil de ver que

$$F(s) := \frac{s}{[(s+1)^2+1](s^2+1)} = \frac{1}{5}\left(\frac{s+2}{s^2+1} - \frac{s+4}{(s+1)^2+1}\right).$$

Calculando a transformada de Laplace inversa obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(-e^{-\pi s}F(s)\right) &= \frac{u_\pi(t)}{5}e^{-(t-\pi)}\cos(t-\pi)+\frac{3u_\pi(t)}{5}e^{-(t-\pi)}\sin(t-\pi)\\ &- \frac{u_\pi(t)}{5}\cos(t-\pi)-\frac{2u_\pi(t)}{5}\sin(t-\pi). \qquad (2)\end{aligned}$$

Somando (1), (2), obtemos a solução desejada

$$\begin{aligned}y(t)=\mathcal{L}^{-1}(Y(s))(t) &= \frac{u_\pi(t)}{5}e^{-(t-\pi)}\cos(t-\pi)+\frac{3u_\pi(t)}{5}e^{-(t-\pi)}\sin(t-\pi)\\ &- \frac{2u_\pi(t)}{5}\sin(t-\pi)-\frac{u_\pi(t)}{5}\cos(t-\pi)+e^{-t}\cos(t)\\ &= -\frac{u_\pi(t)}{5}e^{-(t-\pi)}\cos(t)-\frac{3u_\pi(t)}{5}e^{-(t-\pi)}\sin(t)+\frac{u_\pi(t)}{5}\cos(t)\\ &+ \frac{2u_\pi(t)}{5}\sin(t)+e^{-t}\cos(t).\end{aligned}$$

Questão 4: Encontra a solução $u:[0,10]\times[0,10]\to\mathbb{R}$ do seguinte problema

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=u & (x,y)\in(0,10)\times(0,10)\\ u(x,0)=0,\ u(x,10)=0 & x\in[0,10]\\ u(0,y)=f(y),\ u(10,y)=0 & y\in[0,10],\end{cases}$$

onde $f:[0,10]\to\mathbb{R}$ é a função definida por

$$f(y)=\begin{cases} y \text{ se } 0\le y<5\\ 10-y \text{ se } 5\le y\le 10.\end{cases}$$

Solução:
Buscamos primeiro soluções da forma

$$u(x,y)=X(x)Y(x).$$

Substituindo u na equação, temos

$$\begin{aligned}X''Y+XY'' &= XY\\ \frac{X''}{X}-1 &= -\frac{Y''}{Y}.\end{aligned}$$

Como o lado esquerdo só depende de x e como o lado direito só depende de y, os dois são iguais à mesma constante λ. Assim

$$\begin{aligned}&X''=(\lambda+1)X,\ \text{ e}\\ &Y''=-\lambda Y.\end{aligned}$$

Substituindo u nas condições de contorno homogêneas, temos

$$\begin{aligned} X(x)Y(0) &= 0\forall x \Rightarrow Y(0)=0 \\ X(x)Y(10) &= 0\forall x \Rightarrow Y(10)=0 \text{ e} \\ X(10)Y(y) &= 0\forall y \Rightarrow X(10)=0 \end{aligned}$$

Os autovalores e autofunções do problema em Y são

$$\lambda_m = \frac{m^2\pi^2}{100}, \text{ e}$$
$$Y_m = \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{10}\right),$$

onde $m \in \{1, 2, 3, ...\}$. Substituindo λ_m na equação de X, temos

$$\begin{aligned} X_m'' &= \left(1+\frac{m^2\pi^2}{100}\right)X_m \\ X_m &= A_m\cosh\left(\sqrt{1+\frac{m^2\pi^2}{100}}x\right) + B_m\operatorname{senh}\left(\sqrt{1+\frac{m^2\pi^2}{100}}x\right). \end{aligned}$$

Como $X_m(10) = 0$, temos

$$A_m\cosh\left(\sqrt{100+m^2\pi^2}\right) + B_m\operatorname{senh}\left(\sqrt{100+m^2\pi^2}\right) = 0.$$

Assim

$$B_m = -\coth\left(\sqrt{100+m^2\pi^2}\right)A_m.$$

Segue que as soluções separáveis são

$$\begin{aligned} u_m(x,y) &= A_m\left(\cosh\left(\sqrt{1+\frac{m^2\pi^2}{100}}x\right) - \right. \\ &\left. \coth\left(\sqrt{100+m^2\pi^2}\right)\operatorname{senh}\left(\sqrt{1+\frac{m^2\pi^2}{100}}x\right)\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{10}\right). \end{aligned}$$

Pelo princípio de superposição, a solução geral é

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \sum_{m=0}^{\infty} A_m\left(\cosh\left(\sqrt{1+\frac{m^2\pi^2}{100}}x\right) - \right. \\ &\left. \coth\left(\sqrt{100+m^2\pi^2}\right)\operatorname{senh}\left(\sqrt{1+\frac{m^2\pi^2}{100}}x\right)\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{10}\right). \end{aligned}$$

Para determinar os coeficientes, avaliamos u em $x = 0$.

$$f(y) = u(0, y) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \text{sen}\left(\frac{m\pi y}{10}\right).$$

Segue pelas fórmulas de Euler-Fourier para séries de Fourier em senos que

$$\begin{aligned}
A_m &= \frac{1}{5}\int_0^{10} f(y)\text{sen}\left(\frac{m\pi y}{10}\right) dy \\
&= \frac{1}{5}\int_0^{5} \text{sen}\left(\frac{m\pi y}{10}\right) dy + \frac{1}{5}\int_5^{10} (10-y)\text{sen}\left(\frac{m\pi y}{10}\right) dy \\
&= \frac{40}{m^2\pi^2}\text{sen}\left(\frac{m\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
u(x,y) \quad = \quad & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{40}{m^2\pi^2}\text{sen}\left(\frac{m\pi}{2}\right)\left(\cosh\left(\sqrt{1+\frac{m^2\pi^2}{100}}x\right) - \right. \\
& \left. \coth\left(\sqrt{100+m^2\pi^2}\right)\text{senh}\left(\sqrt{1+\frac{m^2\pi^2}{100}}x\right)\right)\text{sen}\left(\frac{m\pi y}{10}\right).
\end{aligned}$$

FÓRMULAS ÚTEIS NO VERSO!

A: O problema

$$\begin{cases} y'' = \lambda y, \\ y(0) = 0, y(L) = 0, \end{cases}$$

tem autovalores $\lambda = -n^2\pi^2/L^2$, $n \in \{1, 2, 3, ...\}$, e as autofunções correspondentes são

$$y_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \ n \geq 1.$$

B: **Transformadas de Laplace elementares.**

f	$\mathcal{L}[f]$
1	$\frac{1}{s}, \ s > 0$
$t^m \ (m \in \mathbb{N})$	$\frac{m!}{s^{m+1}}, \ s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \ s > a$
$t^m e^{at} \ (m \in \mathbb{N})$	$\frac{m!}{(s-a)^{m+1}}, \ s > a$
$\operatorname{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}, \ s > 0$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}, \ s > 0$
$e^{at}\operatorname{sen}(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}, \ s > a$
$e^{at}\cos(bt)$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2+b^2}, \ s > a$
$\operatorname{senh}(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}, \ s > \|a\|$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}, \ s > \|a\|$
$\delta(t-a)$	e^{-as}
$u_a(t)f(t-a)$	$e^{-as}\mathcal{L}[f](s)$
$e^{at}f$	$\mathcal{L}[f](s-a)$
$f^{(m)}(t)$	$s^m\mathcal{L}[f](s) - s^{m-1}f(0) - ... - f^{(m-1)}(0)$