UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Gabarito da Segunda Prova Unificada de Cálculo IV - 2017/1, 06/06/2017

Questão 1: (2.5 pontos)
Determine todos os valores de λ para os quais o seguinte problema de EDO com condições de contorno tem ao menos uma solução não trivial.

$$\begin{cases} Y''(y) - \lambda Y(y) = 0 \\ Y'(0) = 0; Y'(2) = 0. \end{cases}$$

Solução
Trata-se de uma equação ordinária de segunda ordem com coeficientes constantes. A equação característica associada é $r^2 = \lambda$, da qual surgem três alternativas:

1. $\lambda > 0$. Se λ é positivo, a solução geral é

$$Y(y) = c_1 e^{\sqrt{\lambda} y} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda} y},$$

cuja derivada é

$$Y(y) = c_1 \sqrt{\lambda} e^{\sqrt{\lambda} y} - c_2 \sqrt{\lambda} e^{-\sqrt{\lambda} y}.$$

Aplicando as condições de contorno temos

$$0 = Y'(0) = (c_1 - c_2)\sqrt{\lambda} \Rightarrow c_1 = c_2$$

e

$$0 = Y'(2) = c_1 \sqrt{\lambda}(e^{2\sqrt{\lambda}} - e^{-2\sqrt{\lambda}})$$

que só tem solução se $c_1 = 0$. A conclusão é que se $\lambda > 0$ há somente a solução trivial.

2. $\lambda = 0$.
Se $\lambda = 0$, a equação é $Y''(y) = 0$ cuja a solução é simplesmente $Y(y) = ay + b$. Como $Y'(y) = a$ e $Y'(0) = Y'(2) = 0 = a$, qualquer função constante $Y(y) = b$ é solução. Logo, existem soluções não triviais nesse caso.

3. $\lambda < 0$.
As soluções da equação característica são $r = \pm i\sqrt{-\lambda}$ e a solução geral é

$$Y(y) = k_1 \cos(\sqrt{-\lambda} y) + k_2 \sin(\sqrt{-\lambda} y),$$

cuja derivada é

$$Y'(y) = -k_1 \sqrt{-\lambda} \sin(\sqrt{-\lambda} y) + k_2 \sqrt{-\lambda} \cos(\sqrt{-\lambda} y).$$

Das condições de contorno, temos

$$0 = Y'(0) = k_2\sqrt{-\lambda} \Rightarrow k_2 = 0$$

e

$$0 = Y'(2) = -k_1\sqrt{-\lambda}\sin(2\sqrt{-\lambda}) \Rightarrow \sin(\sqrt{-\lambda}2) = 0 \Rightarrow 2\sqrt{-\lambda} = n\pi.$$

Assim, se

$$\lambda = -\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2,$$

teremos soluções não triviais para o problema.

Questão 2: (2.5 pontos)

Seja $f : [0, 4] \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x \text{ se } 0 \leq x < 2, \\ 2x - 8 \text{ se } 2 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

(a) Determine a série de Fourier em senos de f.

Solução

A série de Fourier em senos de f é

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{4}\right),$$

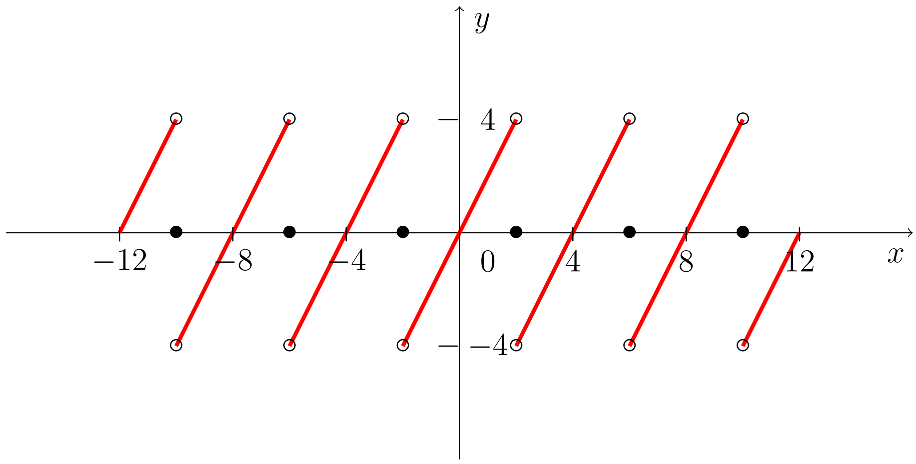
onde os coeficientes são determinados pelas formulas de Euler-Fourier:

$$\begin{aligned}
b_m &= \frac{1}{2}\int_0^4 f(x)\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{4}\right)dx \\
&= \int_0^4 x\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{4}\right)dx - 4\int_2^4 \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{4}\right)dx \\
&= \left[\frac{-4x}{m\pi}\cos\left(\frac{m\pi x}{4}\right)\right]_0^4 + \int_0^4 \frac{4}{m\pi}\cos\left(\frac{m\pi x}{4}\right)dx \\
&\qquad - \left[\frac{-16}{m\pi}\cos\left(\frac{m\pi x}{4}\right)\right]_2^4 \\
&= -\frac{16}{m\pi}\cos(m\pi) + \left[\frac{16}{m^2\pi^2}\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{4}\right)\right]_0^4 \\
&\qquad + \frac{16}{m\pi}\cos(m\pi) - \frac{16}{m\pi}\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) \\
&= -\frac{16}{m\pi}\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

Segue que

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} -\frac{16}{m\pi}\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{4}\right).$$

(b) Esboce o gráfico da série de Fourier obtida no item (a) no intervalo $[-12, 12]$.
Solução



(c) Calcule o valor da série $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)}$.

Dica: $\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) = 0$ para m impar e $\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{2}\right) = 0$ para m par.

solução Substituindo $m = 2p$ na série de Fourier em senos de f, temos

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{p=1}^{\infty} -\frac{8}{p\pi} \cos(p\pi) \operatorname{sen}\left(\frac{p\pi x}{2}\right) \\
&= \sum_{p=1}^{\infty} \frac{8(-1)^{p+1}}{p\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{p\pi x}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Como a função f é continua em $x = 1$, pelo teorema de convergência de Fourier, temos

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{8(-1)^{p+1}}{p\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{p\pi x}{2}\right) = f(1) = 2.$$

Substituindo $p = 2q + 1$ nessa série e fazendo $x = 1$, temos

$$
\begin{aligned}
\sum_{q=0}^{\infty} \frac{8(-1)^{2q+2}}{(2q+1)\pi} \operatorname{sen}\left(q\pi + \frac{\pi}{2}\right) &= 2 \\
\sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{(2q+1)} \cos(q\pi) &= \frac{\pi}{4} \\
\sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q}{(2q+1)} &= \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}
$$

Questão 3: (2.5 pontos) Determine a solução $u(x,t)$ do problema

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, \ (x,t) \in (0,4) \times (0,\infty), \\ u(0,t) = u(4,t) = 10, \ t \in (0,\infty), \\ u(x,0) = 10\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) + 10, \ x \in (0,4). \end{cases}$$

Solução

Determinar a solução $u(x,t)$ do problema:

$$(*) \begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, (x,t) \in (0,4) \times (0,\infty), \\ u(0,t) = u(4,t) = 10, t \in (0,\infty), \\ u(x,0) = 10\cos\left(\dfrac{\pi x}{4}\right) + 10, x \in (0,4). \end{cases}$$

Vamos resolver o problema $(*)$ reduzindo-o a um problema com condições homogêneas: expressamos $u(x,t)$ como a soma da distribuição do estado estacionário $v(x)$ com uma outra distribuição de temperatura $w(x,t)$ que resolve o problema homogêneo associado. Logo v resolve o problema $(**)$ seguinte

$$(**) \begin{cases} v''(x) = 0, x \in (0,4), \\ v(0) = v(4) = 10. \end{cases}$$

Então

$$u(x,t) = v(x) + w(x,t),$$

onde $v(x) = 10$. Assim,

$$u(x,t) = 10 + w(x,t).$$

Resolver $(*)$ reduz-se a resolver o seguinte problema com condições homogêneas:

$$(***) \begin{cases} w_t(x,t) - w_{xx}(x,t) = 0, (x,t) \in (0,4) \times (0,\infty), \\ w(0,t) = w(4,t) = 0, t \in (0,\infty), \\ w(x,0) = 10\cos\left(\dfrac{\pi x}{4}\right), x \in (0,4). \end{cases}$$

Aplicando o método de separação de variáveis, escrevemos:

$$w(x,t) = X(x)T(t).$$

Substituindo na equação

$$X(x)T'(t) - X''(x)T(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)}.$$

Como na última igualdade, o lado esquerdo não depende de t, e o lado direito não depende de x, ambos deverão ser iguais a uma constante real. Pondo

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda,$$

obtemos as equações

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = X(4) = 0, \end{cases} \qquad \text{e} \qquad T'(t) + \lambda T(t) = 0.$$

O problema $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(4) = 0. \end{cases}$ tem autovalores $\lambda_n = \dfrac{n^2\pi^2}{16}$, $n \in \{1, 2, 3, \cdots\}$
e as autofunções correspondentes são

$$X_n(x) = C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{4}\right), n \geq 1.$$

Determinando a solução geral da equação correspondente T,

$$T'(t) + \frac{n^2\pi^2}{16} T(t) = 0,$$

encontramos

$$T_n(t) = B_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{16}t}.$$

Assim podemos por

$$w_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) \qquad \text{e} \qquad w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{4}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{16}t}.$$

Usando a condição inicial $w(x,0) = 10\cos\left(\dfrac{\pi x}{4}\right)$, temos

$$w(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{4}\right) = 10\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right).$$

Desta maneira, os valores A_n são os coeficientes de Fourier em senos de período 8 da extensão impar da função $10\cos\left(\dfrac{\pi x}{4}\right)$ ao intervalo $[-4, 4]$. Portanto, é fácil ver que $A_1 = 0$ e para $n \geq 2$ temos que

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{2}{4}\int_0^4 10\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{4}\right)dx = \frac{10}{2}\int_0^4 \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{4}\right)dx \\
&= 5\int_0^4 \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{4}\right)dx \\
&= \frac{5}{2}\left[\int_0^4 \operatorname{sen}\left((n+1)\frac{\pi x}{4}\right)dx + \int_0^4 \operatorname{sen}\left((n-1)\frac{\pi x}{4}\right)dx\right] \\
&= \frac{5}{2}\left[-\frac{4}{(n+1)\pi}\cos\left((n+1)\frac{\pi x}{4}\right)\bigg|_0^4 - \frac{4}{(n-1)\pi}\cos\left((n-1)\frac{\pi x}{4}\right)\bigg|_0^4\right] \\
&= \frac{5}{2}\left[-\frac{4}{(n+1)\pi}\cos\left((n+1)\pi\right) + \frac{4}{(n+1)\pi} - \frac{4}{(n-1)\pi}\cos\left((n-1)\pi\right) + \frac{4}{(n-1)\pi}\right] \\
&= \frac{5}{2}\left[\frac{8n}{(n^2-1)\pi} + \frac{(-1)^n 8n}{(n^2-1)\pi}\right] \\
&= \frac{20n}{(n^2-1)\pi}\left(1 + (-1)^n\right).
\end{aligned}$$

Logo, $A_n = \begin{cases} 0, & n \text{ é ímpar} \\ \frac{40n}{(n^2-1)\pi}, & n \text{ é par} \end{cases}$ ou $\begin{cases} A_{2k+1} = 0 \\ A_{2k} = \frac{80k}{(4k^2-1)\pi} \end{cases}$.

Portanto,

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{80k}{(4k^2-1)\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi x}{4}\right) e^{-\frac{k^2\pi^2}{4}t}.$$

Finalmente, a solução desejada é

$$u(x,t) = 10 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{80k}{(4k^2-1)\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{2}\right) e^{-\frac{k^2\pi^2}{4}t}.$$

Questão 4: (2.5 pontos) Considere o seguinte problema:

$$u_{yy} + u_{xy} = x u_y \,, (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

(a) Ache todas as soluções não triviais dessa equação que possam ser escritas na forma $u(x,y) = X(x)Y(y)$.

Solução

Fazendo $u(x,y) = X(x)Y(y)$ na equação diferencial parcial

$$\begin{aligned} X(x)Y''(y) + X'(x)Y'(y) &= xX(x)Y'(y) \\ X(x)Y''(y) &= xX(x)Y'(y) - X'(x)Y'(y) \\ X(x)Y''(y) &= Y'(y)(xX(x) - X'(x)) \\ \frac{Y''(y)}{Y'(y)} &= \frac{xX(x) - X'(x)}{X(x)} = \lambda \quad \text{(separação de variáveis)} \end{aligned}$$

Logo temos duas equações para serem resolvidas

$$\begin{cases} Y''(y) - \lambda Y'(y) = 0 \\ X'(x) - (x - \lambda)X(x) = 0. \end{cases}$$

A solução geral para a segunda equação é (formulas dadas na prova)

$$X(x) = A_1 e^{\frac{x^2}{2} - \lambda x}.$$

Para a primeira equação, observamos que a equação característica é $r^2 - \lambda r = 0$, que tem duas soluções, $r = 0$ ou $r = \lambda$. Neste momento identificamos dois casos:

1. $\lambda = 0$.
   Neste caso as duas raízes da equação caraterística são reais iguais e a solução geral é:

   $$Y(y) = B_1 y + C_1,$$

   e a solução do problema é

   $$U(x,y) = X(x)Y(y) = (Ay + B)e^{\frac{x^2}{2}}. \tag{1}$$

2. $\lambda \neq 0$.
   Neste caso as duas raízes da equação caraterística são reais diferentes e a solução geral é:
$$Y(y) = D_1 + E_1 e^{\lambda y},$$
   e a solução do problema é
$$U(x,y) = X(x)Y(y) = (C + De^{\lambda y})e^{(\frac{x^2}{2} - \lambda x)}. \tag{2}$$

(b) Ache uma solução não trivial que satisfaz
$$u(0,0) = 0 \;\text{ e }\; u_x(0,0) = 0.$$

Solução
Para procurar soluções não triviais que satisfaçam as condições dadas, vamos olhar primeiro a equação (1), assim
$$0 = U(0,0) = B \;\text{ e }\; U_x(0,0) = 0,$$
ou seja qualquer valor de $A \neq 0$ temos soluções não triviais, com solução
$$U(x,y) = Aye^{\frac{x^2}{2}}.$$
Também da equação (2)
$$0 = U(0,0) = C + D \;\text{ e }\; U_x(0,0) = -(C + D)\lambda = 0,$$
ou seja qualquer valor de $C = -D \neq 0$ temos soluções não triviais, com solução
$$U(x,y) = C(1 - e^{-\lambda y})e^{(\frac{x^2}{2} - \lambda x)}.$$

A. O problema

$$\begin{cases} y'' = \lambda y, \\ y(0) = 0, y(L) = 0, \end{cases}$$

tem autovalores $\lambda = -n^2\pi^2/L^2$, $n \in \{1, 2, 3, ...\}$, e as autofunções correspondentes são

$$y_n(x) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \; n \geq 1.$$

B. $\displaystyle\int \frac{X'(x)}{X(x)} dx = \ln X(x) + C.$