UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Gabarito da Segunda Prova Unificada de Cálculo IV- 2016/2, 01/12/2016

Questão 1: (2.0 pontos)

(a) Determine a série de Taylor em torno de $x = 0$ da função $f(x) = \dfrac{x^2}{1+2x^3}$.
Solução:
Para dar solução a este problema, temos que lembrar da série geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \quad \text{para todo} \quad |r| < 1. \tag{1}$$

Trocamos r por $-2x^3$ na equação (1), temos

$$\frac{1}{1+2x^3} = \frac{1}{1-(-2x^3)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-2x^3)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^{3n}, \tag{2}$$

finalmente multiplicamos por x^2 na equação (2), obtemos a série de Taylor em torno de $x = 0$

$$\frac{x^2}{1+2x^3} = x^2\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^{3n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^{3n+2}. \tag{3}$$

(b) Determine o intervalo de convergência da série encontrada em (a).
Solução
Para mostrar (b), usamos o fato que a série (2) é uma série geométrica, ela converge quando $|-2x^3| < 1$, isto é, $|x| < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Portanto, a série converge no intervalo $(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}})$. Falta verificar nos extremos do intervalo. No ponto $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ a série (3) fica

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n,$$

que sabemos é uma série divergente. No ponto $x = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ a série (3) fica

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty}(1)^n,$$

que sabemos é uma série divergente. Em conclusão o intervalo de convergência da série (3) é $\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$.

Questão 2: (3.0 pontos)

Seja $f : [-4, 4] \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } -4 \leq x < -2, \\ 4 - x^2 \text{ se } -2 \leq x < 2, \\ 0 \text{ se } 2 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

(a) Determine a série de Fourier de f.

Solução:

O intervalo tem cumprimento $2L = 8$. Assim $L = 4$. Aplicando as formulas de Euler-Fourier, temos então

$$a_0 = \frac{1}{4}\int_{-4}^{4} f(x)dx = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2}(4 - x^2)dx = \frac{1}{4}\left[4x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^{2} = \frac{8}{3}.$$

e

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{4}\int_{-4}^{4} f(x)\cos\left(\frac{m\pi x}{4}\right)dx \\ &= \frac{1}{4}\int_{-2}^{2}\left(4 - x^2\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{4}\right)dx \\ &= \left[\frac{1}{m\pi}(4 - x^2)\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{4}\right)\right]_{-2}^{2} + \int_{-2}^{2}\frac{2x}{m\pi}\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{4}\right)dx \\ &= \left[\frac{-8x}{m^2\pi^2}\cos\left(\frac{m\pi x}{4}\right)\right]_{-2}^{2} + \int_{-2}^{2}\frac{8}{m^2\pi^2}\cos\left(\frac{m\pi x}{4}\right)dx \\ &= -\frac{32}{m^2\pi^2}\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) + \left[\frac{32}{m^3\pi^3}\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{4}\right)\right]_{-2}^{2} \\ &= -\frac{32}{m^2\pi^2}\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) + \frac{64}{m^3\pi^3}\text{sen}\left(\frac{m\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Em fim,

$$b_m = \frac{1}{4}\int_{-4}^{4} f(x)\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{4}\right)dx = 0,$$

pois o integrando é impar. A série de Fourier é então

$$f(x) = \frac{4}{3} + \sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{64}{m^3\pi^3}\text{sen}\left(\frac{m\pi}{2}\right) - \frac{32}{m^2\pi^2}\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right)\right]\cos\left(\frac{m\pi x}{4}\right).$$

(b) Esboce o gráfico da série de Fourier obtida no item (a) no intervalo $[-12, 12]$.

Solução:

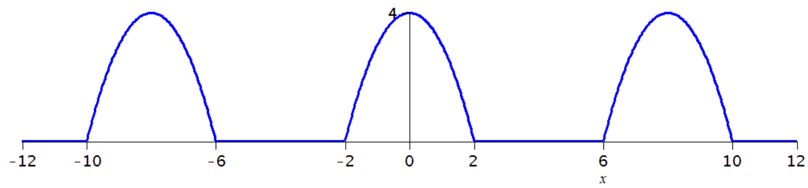

Figura 1: Gráfico da série de Fourier

(c) Calcule o valor da série $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2}$.

Solução

Como f é contínua em $x = 2$, pelo teorema de convergência de Fourier,

$$\frac{4}{3} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{64}{m^3\pi^3} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{2}\right) - \frac{32}{m^2\pi^2} \cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) \right] \cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) = 0.$$

Mas, para todo m,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(m\pi) = 0,$$

e

$$\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[\cos(m\pi) + 1\right] = \begin{cases} 1 \text{ se } m \text{ par, e} \\ 0 \text{ se } m \text{ impar.} \end{cases}$$

Substituindo $m = 2n$, temos então,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{32}{4n^2\pi^2} &= \frac{4}{3} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

Questão 3: (3.0 pontos) Determine a solução $u(x,t)$ do seguinte problema que representa o comportamento oscilatório de uma corda elástica com extremidades fixas.

$$\begin{cases} u_{xx} - u_{tt} = u, & (x,t) \in (0,10) \times (0,+\infty), \\ u(0,t) = u(10,t) = 0, & t \in (0,+\infty), \\ u(x,0) = 0, & x \in (0,10), \\ u_t(x,0) = x(10-x), & x \in (0,10). \end{cases}$$

Solução:

Aplicando o método de separação de variáveis, escrevemos:

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

Substituindo na equação, obtemos:

$$T(t)X''(x) - X(x)T''(t) = X(x)T(t) \Leftrightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} + 1.$$

Como na última igualdade o lado esquerdo não depende de t e o lado direito não depende de x, ambos deverão ser iguais a uma constante real, que chamaremos de λ.

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} + 1 = \lambda.$$

de onde obtemos as equações:

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0 \text{ e } T''(t) - (\lambda - 1)T(t) = 0.$$

Usando agora as condições de contorno temos que:

$$X(0)T(t) = 0, \forall t \geq 0 \Rightarrow X(0) = 0$$

e

$$X(10)T(t) = 0, \forall t \geq 0 \Rightarrow X(10) = 0$$

Temos que o problema: $\begin{cases} X''(x) = \lambda X(x) \\ X(0) = 0 \text{ e } X(10) = 0 \end{cases}$

tem autovalores $\lambda = \dfrac{-n^2\pi^2}{100}$, $n \in \{1, 2, 3, \cdots\}$ e as autofunções correspondentes são:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{10}\right), \ n \geq 1.$$

Resolvendo a equação correspondente de T temos que:

$$T''(t) + \left(\frac{n^2\pi^2}{100} + 1\right)T(t) = 0.$$

Cuja solução geral é dada por:

$$T(t) = a_1 \sin\left(t\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{10^2} + 1}\right) + a_2 \cos\left(t\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{10^2} + 1}\right).$$

Da condição inicial:

$$X(x)T(0) = 0, \forall x \geq 0 \Rightarrow T(0) = 0,$$

obtemos:

$$T(0) = a_2 = 0.$$

Portanto, temos que:

$$T_n(t) = \sin\left(t\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{10^2} + 1}\right).$$

Daí, a solução geral do nosso problema é dada por:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \sin\frac{n\pi x}{10} \sin\left(t\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{10^2} + 1}\right).$$

Usando agora a segunda condição inicial, deverá ser satisfeita a relação:

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{10^2} + 1}\sin\frac{n\pi x}{10} = x(10-x).$$

Assim, as quantidades $k_n\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{10^2}+1}$ são os coeficientes de Fourier em senos de período 20 da função $x(10-x)$; portanto,

$$\begin{aligned}
k_n\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{10^2}+1} &= \frac{2}{10}\int_0^{10} x(10-x)\sin\frac{n\pi x}{10}dx \\
&= \frac{1}{5}\left[\int_0^{10} 10x\sin\frac{n\pi x}{10}dx - \int_0^{10} x^2\sin\frac{n\pi x}{10}dx\right] \\
&= \frac{1}{5}\left[10\left(x\frac{-10}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{10}\Big|_0^{10} - \int_0^{10}\frac{-10}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{10}dx\right) - \int_0^{10} x^2\sin\frac{n\pi x}{10}dx\right] \\
&= \frac{1}{5}\left[\left(\frac{-10^3}{n\pi}\cos n\pi\right) - \left(x^2\frac{-10}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{10}\Big|_0^{10} - \int_0^{10}\frac{-20x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{10}dx\right)\right] \\
&= \frac{1}{5}\left[\frac{-10^3}{n\pi}\cos n\pi + \frac{10^3}{n\pi}\cos n\pi + \int_0^{10}\frac{-20x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{10}dx\right] \\
&= \frac{1}{5}\left[\frac{-20}{n\pi}\left(x\frac{10}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{10}\Big|_0^{10} - \int_0^{10}\frac{10}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{10}dx\right)\right] \\
&= \frac{1}{5}\left[\frac{-20}{n\pi}\left(\frac{10^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{10}\Big|_0^{10}\right)\right] \\
&= \frac{-400}{n^3\pi^3}\left(\cos n\pi - 1\right).
\end{aligned}$$

Podemos escrever:

$$\frac{-400}{n^3\pi^3}\left(\cos n\pi - 1\right) = \begin{cases} 0, \text{ se } n \text{ é par} \\ \\ \dfrac{800}{n^3\pi^3}, \text{ se } n \text{ é ímpar.}\end{cases}$$

Portanto, temos:

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{800}{(2m-1)^3\pi^3} \sin\frac{(2m-1)\pi x}{10} \sin\left(t\sqrt{\frac{(2m-1)^2\pi^2}{10^2}+1}\right).$$

Questão 4: (2.0 pontos) Considere o seguinte problema :

$$u_{xx} + u_{xy} + u_x = 0, \ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

(a) Ache todas as soluções não triviais dessa equação que possam ser escritas na forma $u(x,y) = X(x)Y(y)$.
Solução:
Procuramos soluções da equação na forma

$$u(x,y) = X(x)Y(y).$$

Substituindo essa solução na equação, rearranjando os termos e igualando-os a uma constante de separação λ real, chegamos a:

$$\frac{X''}{X'} + 1 = -\frac{Y'}{Y} = \lambda,$$

onde obtemos as equações:

$$X'' + (1-\lambda)X' = 0 \text{ e } Y' + \lambda Y = 0.$$

Através da primeira equação, obtemos a equação característica $r^2 + (1-\lambda)\, r = 0$, com raízes $r_1 = 0$ e $r_2 = \lambda - 1$.

Analisando os dois casos para λ:

1. Para $\lambda = 1$, temos:
   $X'' = 0$,
   $Y' + Y = 0$.

   Logo, obtemos $X(x)$ e $Y(y)$ nas formas:

   $$X(x) = c_1 + c_2\, x \text{ e } Y(y) = d_1\, e^{-y}.$$

   Portanto, a solução para $\lambda = 1$ fica:

   $$u(x,y) = C_1\, e^{-y} + C_2\, x\, e^{-y}.$$

2. Para $\lambda \neq 1$, temos:
   Para X, a equação é $X'' + (1-\lambda)\, X' = 0$. Nesse caso, $X'(x) = c_1\, e^{(\lambda-1)x}$, de onde obtemos a solução

   $$X(x) = c_2 + c_1\, \frac{e^{(\lambda-1)\,x}}{\lambda - 1}.$$

   Para Y, a equação é $Y' + \lambda Y = 0$. Cuja solução é

   $$Y(y) = d_1\, e^{-\lambda\, y}.$$

Portanto, a solução para $\lambda \neq 1$ fica:

$$u(x,y) = C_1\, e^{-\lambda\, y} + \frac{C_2}{\lambda - 1}\, e^{(\lambda-1)\, x - \lambda\, y}.$$

(b) Ache uma solução não trivial que satisfaz

$$u(0,0) = 0 \;\text{ e }\; u_{xx}(0,0) = 0.$$

Solução:

1. Para $\lambda \neq 1$, temos $u(x,y) = C_1\, e^{-\lambda\, y} + \frac{C_2}{\lambda-1}\, e^{(\lambda-1)\, x - \lambda\, y}$.
   Com a condição $u(0,0) = 0$, encontramos $C_1 + \frac{C_2}{\lambda-1} = 0$.

   A segunda derivada u_{xx} é dada por $u_{xx}(x,y) = C_2\,(\lambda - 1)\, e^{(\lambda-1)\, x - \lambda\, y}$.

   A condição $u_{xx}(0,0) = 0$ implica que $C_2\,(\lambda - 1) = 0$. Como $\lambda \neq 1$, então $C_2 = 0$.
   Portanto, nesse caso, há apenas a solução trivial, que não nos interessa.

   $$u(x,y) = 0.$$

2. Para $\lambda = 1$, temos $u(x,y) = C_1\, e^{-y} + C_2\, x\, e^{-y}$.

   Para $u(0,0) = 0$, a equação acima resulta que $C_1 = 0$..
   Agora, derivando duas vezes $u(x,y) = C_2\, x\, e^{-y}$, obtemos $u_{xx}(x,y) = 0$, que satisfaz $u_{xx}(0,0) = 0$.
   Assim, a solução para $\lambda = 1$ é

   $$u(x,y) = C_2\, x\, e^{-y},$$

   com $C_2 \neq 0$, satisfazendo as condições dadas.

A: O problema

$$\begin{cases} y'' = \lambda y, \\ y(0) = 0, y(L) = 0, \end{cases}$$

tem autovalores $\lambda = -n^2\pi^2/L^2$**,** $n \in \{1, 2, 3, ...\}$**, e as autofunções correspondentes são**

$$y_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \ n \geq 1.$$

B: Transformadas de Laplace elementares.

f	$\mathcal{L}[f]$
1	$\frac{1}{s}, \ s > 0$
$t^m \ (m \in \mathbb{N})$	$\frac{m!}{s^{m+1}}, \ s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \ s > a$
$t^m e^{at} \ (m \in \mathbb{N})$	$\frac{m!}{(s-a)^{m+1}}, \ s > a$
$\operatorname{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}, \ s > 0$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}, \ s > 0$
$e^{at}\operatorname{sen}(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}, \ s > a$
$e^{at}\cos(bt)$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2+b^2}, \ s > a$
$\operatorname{senh}(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}, \ s > \|a\|$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}, \ s > \|a\|$
$\delta(t-a)$	e^{-as}
$u_a(t)f(t-a)$	$e^{-as}\mathcal{L}[f](s)$
$e^{at}f$	$\mathcal{L}[f](s-a)$
$f^{(m)}(t)$	$s^m\mathcal{L}[f](s) - s^{m-1}f(0) - ... - f^{(m-1)}(0)$