TEMPO DE PROVA: 2h30

Questão 1: (3 pontos)

Estude a convergência, convergência absoluta ou divergência das séries abaixo.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^2}{n^3+1}$

Solução:
A série tem a forma

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} f(n),$$

onde

$$f : [2, \infty[\to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{x^2}{x^3+1}.$$

Essa função é positiva. Como

$$f'(x) = \frac{x(2-x^3)}{(x^3+1)^2} \leq 0,$$

essa função é decrescente. Finalmente,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^3+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+x^{-2}} = 0.$$

Segue pelo teste de série alternada que essa série é convergente.

Aplicamos o teste de comparação no limite à sua série de valores absolutos, comparando-a com a série harmônica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{n^3+1}\right)\left(\frac{n}{1}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3+1} = 1,$$

e como esse limite existe e é diferente de zero, segue pelo teste de comparação no limite que a série dos valores absolutos é divergente. Essa série é então conditionalmente convergente.

(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log_e(n)^2}$

Solução:
Essa série tem a forma

$$f(x) := \sum_{n=2}^{\infty} f(n),$$

onde

$$f : [2, \infty[\to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{x \log_e(x)^2}.$$

Essa função é positiva em $[2, \infty[$. Como seu denominador é crescente nesse intervalo, ela é decrescente. Calculando a integral

$$I := \int_2^{\infty} \frac{1}{x \log_e(x)^2} dx,$$

utilizando a substituição,

$$y = \log_e(x),$$
$$dy = \frac{1}{x} dx,$$

obtemos

$$I = \int_{\log_e(2)}^{\infty} \frac{1}{y^2} dy = \left[\frac{-1}{y} \right]_{\log_e(2)}^{\infty} = \frac{1}{\log_e(2)}.$$

Como essa integral converge, segue pelo teste da integral que essa série é (absolutamente) convergente.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2} - 1)$

Solução:
Essa série possui apenas termos positivos. Aplicamos o teste de comparação no limite comparando-a com a série harmônica. Calculamos o limite

$$L := \lim_{n \to \infty} (\sqrt[n]{2} - 1) / \frac{1}{n} = \lim_{x \to \infty} \left(2^{\frac{1}{x}} - 1 \right) / \frac{1}{x}.$$

Aplicando a regra de l'hôpital, temos

$$L = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{-1}{x^2} \log_e(2) 2^{\frac{1}{x}} \right) / \frac{-1}{x^2} = \log_e(2).$$

Como esse limite existe e é diferente de zero, e como a série harmônica é divergente, segue pelo teste de comparação no limite que essa série é divergente.

Questão 2: (2 pontos)

Considere a seguinte função:

$$h(x) := \int_0^x \frac{1}{y}\log_e\left(\frac{1-y}{1+y}\right)dy.$$

(a) Encontre a série de Taylor em torno de zero dessa função.

Solução:

A derivada de h é

$$h'(x) = \frac{1}{x}\log_e\left(\frac{1-x}{1+x}\right) := \frac{1}{x}g(x).$$

A derivada de g é

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}g(x) &= \frac{d}{dx}\log_e\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\\ &= \frac{d}{dx}\big(\log_e(1-x) - \log_e(1+x)\big)\\ &= \frac{-1}{(1-x)} - \frac{1}{1+x}\\ &= \frac{-2}{1-x^2}\\ &= -2\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m x^{2m}.\end{aligned}$$

Segue que

$$g(x) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{-2(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)} + C,$$

e como $g(0) = 0$, $C = 0$. Segue que

$$\begin{aligned}h'(x) &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{-2(-1)^m x^{2m}}{(2m+1)}\\ \therefore\quad h(x) &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{-2(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)^2} + C\end{aligned}$$

Como $h(0) = 0$, $C = 0$. Temos então

$$h(x) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{-2(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)^2}.$$

(b) Determine o raio de convergência da série encontrada em (a).

Solução:
O m-ésimo termo dessa série é

$$a_m = \frac{-2(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)^2}.$$

Aplicando o teste da razão, temos

$$\lim_{m\to\infty} \left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right| = \lim_{m\to\infty} \left|\frac{(-1)^{m+1}x^{2m+3}}{(2m+3)^2}\frac{(2m+1)^2}{(-1)^m x^{2m+1}}\right| = |x|^2 \lim_{m\to\infty} \left|\frac{(2m+1)^2}{(2m+3)^2}\right| = |x|^2 .$$

Segue pelo teste da razão que essa série é convergente para $|x| < 1$ e divergente para $|x| > 1$. O raio de convergência é então 1.

Questão 3: (2 pontos)
Considere a seguinte EDO:

$$x^2y'' + (x-1)y' + (x+1)y = 0.$$

(a) Mostre que $x_0 = 1$ é ponto ordinário dessa equação.

Solução:
A equação é

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0,$$

onde

$$\begin{aligned} P(x) &= x^2 \\ Q(x) &= x-1 \\ R(x) &= x+1 \end{aligned}$$

Como $P(1) = 1 \neq 0$, $x = 1$ é ponto ordinário dessa equação.

(b) Determine a relação de recorrência da solução em séries dessa equação em torno desse ponto.

Solução:
Substituimos primeiro $t = (x-1)$. A equação é então

$$(t+1)^2y'' + ty' + (t+2)y = 0.$$

A solução é

$$\begin{aligned} y &= \sum_{m=0}^{\infty} a_m t^m \\ \therefore\quad y' &= \sum_{m=1}^{\infty} m a_m t^{m-1} \\ \therefore\quad y'' &= \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) a_m t^{m-2} \end{aligned}$$

Substituindo na equação, temos

$$(t^2+2y+1)\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m t^{m-2} + t\sum_{m=1}^{\infty} m a_m t^{m-1} + (t+2)\sum_{m=0}^{\infty} a_m t^m = 0$$

$$\therefore \quad \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m t^m + \sum_{m=2}^{\infty} 2m(m-1)a_m t^{m-1} + \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m t^{m-2}$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty} m a_m t^m + \sum_{m=0}^{\infty} a_m t^{m+1} + \sum_{m=0}^{\infty} 2a_m t^m = 0$$

$$\therefore \quad \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m t^m + \sum_{m=1}^{\infty} 2(m+1)m a_{m+1} t^m + \sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1)a_{m+2} t^m$$
$$\sum_{m=1}^{\infty} m a_m t^m + \sum_{m=1}^{\infty} a_{m-1} t^m + \sum_{m=0}^{\infty} 2a_m t^m = 0$$

$$\therefore \quad \sum_{m=2}^{\infty} \big((m+2)(m+1)a_{m+2} + 2(m+1)m a_{m+1} + (m^2+2)a_m + a_{m-1}\big)t^m$$
$$+\big(6a_3+4a_2+3a_1+a_0\big)t + \big(2a_2+2a_0\big) = 0$$

A relação de recorrência é então

$$\begin{aligned} a_2 &= -a_0 \\ a_3 &= \frac{-1}{6}\big(4a_2+3a_1+a_0\big) \\ a_{m+2} &= \frac{-1}{(m+2)(m+1)}\big(2m(m+1)a_{m+1} + (m^2+2)a_m + a_{m-1}\big) \ \forall m \geq 2. \end{aligned}$$

(c) Determine uma cota inferior para o raio de convergência da série encontrada em (b).

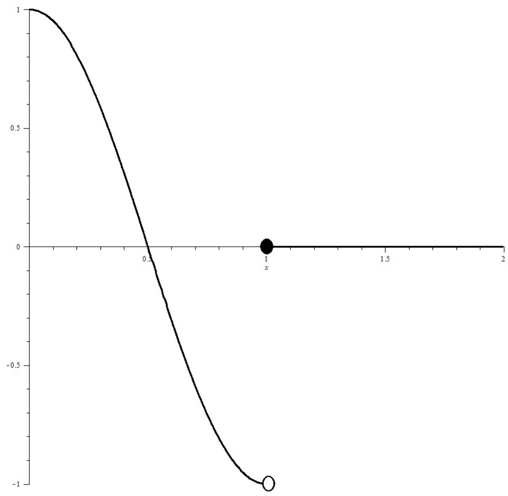
Solução:
O único zero em $\mathbb{C}$ do polinômio P é 0. A distância de x_0 a esse ponto é 1. Segue que uma cota inferior para o raio de convergência dessa série é 1.

Questão 4: (3 pontos)

(a) Esboce o gráfico da seguinte função no intervalo $[0,2]$:

$$f(x) = \begin{cases} \cos(\pi x) & \text{se } 0 \leq x < 1, \text{ e} \\ 0 & \text{se } 1 \leq x. \end{cases}$$

Solução:
O gráfico dessa função é



(b) Determine a transformada de Laplace da função dada no item (a).

Solução:
A função é

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos(\pi x) - u_1(x)\cos(\pi x) \\ &= \cos(\pi x) - u_1(x)\cos(\pi(x-1)+\pi) \\ &= \cos(\pi x) + u_1(x)\cos(\pi(x-1)) \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f](t) &= \mathcal{L}[\cos(\pi x)](t) + \mathcal{L}[u_1(x)\cos(\pi(x-1))](t) \\ &= \frac{t(1+e^{-t})}{t^2+\pi^2}. \end{aligned}$$

(c) Determine a transformada de Laplace inversa da seguinte função:

$$F(t) = \frac{(2t^3 - 2t^2 + t)e^{-t}}{(t^2 - 2t + 2)(t^2 - 1)}.$$

Solução:
Aplicando a técnica de frações parciais, temos

$$\frac{2t^3 - 2t^2 + t}{(t^2 - 2t + 2)(t^2 - 1)} = \frac{(at + b)}{(t^2 - 2t + 2)} + \frac{c}{(t - 1)} + \frac{d}{(t + 1)}.$$

Somando essas frações e comparando os coeficientes, temos

$$\begin{aligned} a + c + d &= 2, \\ b - c - 3d &= -2, \\ -a + 4d &= 1, \text{ e} \\ -b + 2c - 2d &= 0. \end{aligned}$$

Segue que

$$a = 1,\ b = 0,\ c = \frac{1}{2},\ \text{e}\ d = \frac{1}{2}.$$

Assim

$$\begin{aligned} F(t) &= \left(\frac{t}{(t^2 - 2t + 2)} + \frac{1}{2(t-1)} + \frac{1}{2(t+1)}\right)e^{-t} \\ &= \left(\frac{(t-1)}{(t-1)^2 + 1} + \frac{1}{(t-1)^2 + 1} + \frac{1}{2(t-1)} + \frac{1}{2(t+1)}\right)e^{-t} \\ &= \mathcal{L}\left[e^x \cos(x) + e^x \text{sen}(x) + \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}\right]e^{-t}. \end{aligned}$$

Segue que a transformada de Laplace inversa de F é

$$\left[e^{(x-1)}\cos(x-1) + e^{(x-1)}\text{sen}(x-1) + \frac{1}{2}e^{(x-1)} + \frac{1}{2}e^{-(x-1)}\right]u_1(x).$$

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.

FÓRMULAS ÚTEIS NO VERSO!

A - Propriedades básicas do logaritmo e do exponencial.

$$\begin{aligned} \log_e(1) &= 0, \\ \log_e(ab) &= \log_e(a) + \log_e(b), \\ \exp(0) &= 1 \text{ e} \\ \exp(a+b) &= \exp(a)\exp(b). \end{aligned}$$

B - Transformadas de Laplace elementares.

f	$\mathcal{L}[f]$
1	$\frac{1}{s},\ s > 0$
$t^m\ (m \in \mathbb{N})$	$\frac{m!}{s^{m+1}},\ s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a},\ s > a$
$t^m e^{at}\ (m \in \mathbb{N})$	$\frac{m!}{(s-a)^{m+1}},\ s > a$
$\text{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2},\ s > 0$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2},\ s > 0$
$e^{at}\text{sen}(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2},\ s > a$
$e^{at}\cos(bt)$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2+b^2},\ s > a$
$\text{senh}(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2},\ s > \|a\|$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2},\ s > \|a\|$
$\delta(t-a)$	e^{-as}
$u_a(t)f(t-a)$	$e^{-as}\mathcal{L}[f](s)$
$e^{at}f$	$\mathcal{L}[f](s-a)$
$f^{(m)}(t)$	$s^m\mathcal{L}[f](s) - s^{m-1}f(0) - ... - f^{(m-1)}(0)$