UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Gabarito da Primeira Prova Unificada de Cálculo IV- 2017/1, 02/05/2017

Questão 1: (2.5 pontos)

(a) Estude a convergência, convergência absoluta ou divergência da série abaixo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cos(3n)}{3^n}$.

Solução:

Como $|\cos(3n)| \leq 1$, então $|\frac{2^n \cos(3n)}{3^n}| \leq \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$, assim o critério de comparação, como a série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ é geométrica com $|\frac{2}{3}| < 1$, por tanto convergente, temos que a série em questão é absolutamente convergente.

(b) Determine o raio de convergência da série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n$.

Solução:

Pelo critério do quociente com $a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n$,

$$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{2(n+1)!((n+1)!)^2 |x|^{n+1}}{(2n)!(n!)^2 |x|^n} = \frac{(2n+1)(2n+2)|x|}{(n+1)^2},$$

logo $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = 4|x|$, por tanto o raio de convergência é $\frac{1}{4}$.

(c) A série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{m(\log m)^2}$ é convergente ou divergente? Justifique.

Solução

Vamos usar o critério da integral, para isso calculemos

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\log x)^2} \overbrace{=}^{u=\log x} \int_{\log 2}^{+\infty} \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u}\Big|_{\log 2}^{+\infty} = \frac{1}{\log 2} < +\infty.$$

Assim o critério da integral mostra que a série em questão é convergente.

Questão 2: (2,5 pontos)

Considere a função

$$f(x) := \int_0^x \frac{1}{y} \arctan(y) dy.$$

(a) Encontre a série de MacLaurin de essa função.
Dica: Determine primeiro a série de MacLaurin de $\arctan(y)$.

Solução
Derivando a função $g(y) := \arctan(y)$, temos

$$g'(y) = \frac{1}{1+y^2} = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m y^{2m}.$$

Integrando essa série, temos

$$g(y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} y^{2m+1} + C,$$

para um constante C, e como $g(0) = \arctan(0) = 0$, temos $C = 0$. Substituindo essa série na formula para f, temos então

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{y} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} y^{2m+1} dy = \int_0^x \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} y^{2m} dy = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^2} x^{2m+1} + C,$$

para um constante C. De novo, como $f(0) = 0$, temos $C = 0$, e a série de MacLaurin de f é então

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^2} x^{2m+1}.$$

(b) Encontre $f^{(10)}(0)$ (a derivada de ordem 10 da função f em $x = 0$).
Solução
Como a série de MacLaurin de f só tem potências impares de x, o coeficiente de x^{10} nessa série é $c_{10} = 0$. Segue então pelo teorema de Taylor que

$$f^{(10)} = 10! c_{10} = 0.$$

Questão 3: (2,5 pontos) Considere a seguinte equação de Chebyshev.

$$(1 - x^2)y'' - xy' + y = 0.$$

(a) Mostre que 1 é ponto singular regular de essa equação.
Solução
Temos uma equação da forma

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0,$$

sendo $P(x) = 1 - x^2$, $Q(x) = -x$ e $R(x) = 1$, todos polinômios. Como $P(1) = 0$, o ponto é singular. Para mostrar que o ponto é também regular, calculamos os limites como abaixo:

$$\lim_{x\to 1}(x-1)\frac{Q(x)}{P(x)} = \lim_{x\to 1}(x-1)\frac{-x}{1-x^2} = \lim_{x\to 1}(x-1)\frac{-x}{(1-x)(1+x)} = \lim_{x\to 1}\frac{-(-x)}{1+x} = \frac{1}{2}$$

e

$$\lim_{x\to 1}(x-1)^2\frac{R(x)}{P(x)} = \lim_{x\to 1}(x-1)^2\frac{1}{1-x^2} = \lim_{x\to 1}(x-1)^2\frac{1}{(1-x)(1+x)} = \lim_{x\to 1}\frac{-(x-1)}{1+x} = 0.$$

Como cada limite é finito, o ponto é singular regular.

(b) Determine as raízes da equação indicial de essa equação.
Solução
Os itens (b) e (c) têm resolução conjunta:

(c) Determine a relação de recorrência da solução em série de essa equação que corresponde à maior das duas raízes encontradas no item b).
Solução
Encontrar a equação indicial (e suas raízes) é parte do processo de resolver a equação usando séries. Começamos assumindo a existência de uma solução da forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^{n+r}$$

e substituímos na equação.

Temos

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)(x-1)^{n+r-1}$$

e

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)(n+r-1)(x-1)^{n+r-2}.$$

Antes de substituir na equação, note que estamos escrevendo y em potências de $(x-1)$, mas os coeficientes $P(x) = 1-x^2$ e $Q(x) = -x$ não estão escritos assim. Como queremos "jogar pra dentro do somatório", precisamos escrevê-los como potências se $(x-1)$. Para $Q(x)$ é fácil, pois $x = (x-1)+1$. Para $P(x)$, resolvemos o sistema originado da equação

$$P(x) = 1-x^2 = A(x-1) + B(x-1)^2 = (B-A) + (A-2B)x + Bx^2,$$

que nos fornece $A = -2$ e $B = -1$. Esse passo não seria necessário na alternativa sugerida acima. Agora substituímos na equação.

$$\begin{aligned} P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y &= \\ \left(-2(x-1)-(x-1)^2\right)\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)(n+r-1)(x-1)^{n+r-2} &+ \\ (-(x-1)-1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)(x-1)^{n+r-1} &+ \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^{n+r} &= 0 \end{aligned}$$

Agora, "juntando os somatórios", temos

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} -2a_n(n+r)(n+r-1)(x-1)^{n+r-1} &+ \sum_{n=0}^{\infty} -a_n(n+r)(n+r-1)(x-1)^{n+r-0} + \\
\sum_{n=0}^{\infty} -a_n(n+r)(x-1)^{n+r-0} &+ \sum_{n=0}^{\infty} -a_n(n+r)(x-1)^{n+r-1} + \\
\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^{n+r} &= 0
\end{aligned}$$

Duas das parcelas acima não estão com expoente $n+r$ como desejado. Reindexando com a mudança $m = n-1$ e retornando ao índice n em seguida, obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-1}^{\infty} -2a_{n+1}(n+1+r)(n+r)(x-1)^{n+r} &+ \sum_{n=0}^{\infty} -a_n(n+r)(n+r-1)(x-1)^{n+r} + \\
\sum_{n=0}^{\infty} -a_n(n+r)(x-1)^{n+r} &+ \sum_{n=-1}^{\infty} -a_{n+1}(n+1+r)(x-1)^{n+r} + \\
\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^{n+r} &= 0.
\end{aligned}$$

Evidenciando $(x-1)^{n+r}$, obtemos tanto a *equação indicial* quando a relação de recorrência (ainda em função de r) desejada

$$[-2r(r-1)-r]\, a_0(x-1)^{r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \Bigg[[-(n+r)(n+r-1)-(n+r)+1]\, a_n +$$

$$[-2(n+1+r)(n+r)-(n+1+r)]a_{n-1} \Bigg] (x-1)^{n+r} = 0.$$

Os *expoentes na singularidade* $x_0 = 1$, raízes da equação indicial e respostas para o item (b), são $r_1 = 0$ e $r_2 = \dfrac{1}{2}$. Para o item (c), basta substituir r na equação de recorrência:

$$a_n = -\frac{2(n+\frac{3}{2})(n+\frac{1}{2}) + (n+\frac{3}{2})}{(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2}) + (n+\frac{1}{2}) + 1} a_{n-1}.$$

Question 4: (2.5 pontos)

Utilize a transformada de Laplace para resolver o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 3y = e^t + \delta(t-1)e^{2t}, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

onde $\delta(t-1)$ é a "função"delta de Dirac com singularidade em 1.

Solução Usando o método da transformada de Laplace obtemos

$$\mathcal{L}[y''] + 2\mathcal{L}[y'] + 3\mathcal{L}[y] = -y'(0) - sy(0) + s^2Y(s) + 2sY(s) - 2y(0) + 3Y(s) = \frac{1}{s-1} + e^{2-s},$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+2s+3}\left(1 + \frac{1}{s-1} + e^{2-s}\right).$$

Note que $s^2 + 2s + 3 = (s+1)^2 + 2$. Logo

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2+2}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\sqrt{2}}{(s+1)^2+2}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-t}\sin(\sqrt{2}t). \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{2-s}}{(s+1)^2+2}\right] &= e^2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{(s+1)^2+2}\right] \\ &= e^2u_1(t)[L]^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2+2}\right](t-1) \\ &= u_1(t)\frac{1}{\sqrt{2}}e^2e^{-(t-1)}\sin(\sqrt{2}(t-1)). \end{aligned} \tag{2}$$

Pelo Cálculo I é fácil de ver que

$$\frac{1}{(s-1)[(s+1)^2+2]} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3(s-1)} - \frac{\frac{1}{3}s+1}{(s+1)^2+2}\right).$$

Daí segue-se pelo Cálculo IV

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)[(s+1)^2+2]}\right] &= \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{3(s-1)} - \frac{s+1}{3[(s+1)^2+2]} - \frac{2}{3[(s+1)^2+2]}\right] \\ &= \frac{1}{6}e^t - \frac{1}{6}e^{-t}\cos(\sqrt{2}t) - \frac{\sqrt{2}}{6}e^{-t}\sin(\sqrt{2}t). \end{aligned} \tag{3}$$

Somando (1), (2), (3) obtemos a solução desejada

$$\begin{aligned} y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(s))(t) &= \frac{\sqrt{2}}{3}e^{-t}\sin(\sqrt{2}t) + u_1(t)\frac{1}{\sqrt{2}}e^3e^{-t}\sin(\sqrt{2}(t-1)) + \frac{1}{6}e^t - \frac{1}{6}e^{-t}\cos(\sqrt{2}t) \\ &= \frac{e^{-t}}{6}\left(3\sqrt{2}e^3u_1(t)\sin(\sqrt{2}(t-1))) + e^{2t} + 2\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t) - \cos(\sqrt{2}t)\right). \end{aligned}$$

Transformadas de Laplace elementares.

f	$\mathcal{L}[f]$
1	$\frac{1}{s},\ s>0$
$t^m\ (m\in\mathbb{N})$	$\frac{m!}{s^{m+1}},\ s>0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a},\ s>a$
$t^m e^{at}\ (m\in\mathbb{N})$	$\frac{m!}{(s-a)^{m+1}},\ s>a$
$\mathrm{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2},\ s>0$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2},\ s>0$
$e^{at}\mathrm{sen}(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2},\ s>a$
$e^{at}\cos(bt)$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2+b^2},\ s>a$
$\mathrm{senh}(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2},\ s>\|a\|$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2},\ s>\|a\|$
$\delta(t-a)$	e^{-as}
$u_a(t)f(t-a)$	$e^{-as}\mathcal{L}[f](s)$
$e^{at}f$	$\mathcal{L}[f](s-a)$
$f^{(m)}(t)$	$s^m\mathcal{L}[f](s)-s^{m-1}f(0)-...-f^{(m-1)}(0)$