UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Gabarito da Primeira Prova Unificada de Cálculo IV- 2016/2, 03/11/2016

Questão 1: (2.5 pontos)

(a) (1.0) Estude a convergência, convergência absoluta ou divergência da série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{n^4 - 1}$.

(b) (1.0) Determine o raio de convergência da série de potências $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n \sqrt{n}} x^n$.

(c) (0.5) Estude a convergência ou divergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$.

Solução:

(a) Vamos utilizar o teste da série alternada.

- Consideremos a função $f(x) = \frac{x^3}{x^4-1}$, temos que, $f'(x) = \frac{-x^6-x^2}{(x^4-1)^2}$. Logo a função f é decrescente para todo $x > 1$.
- $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^4-1} = 0$.

Concluímos, pelo teste da série alternada que $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{n^4 - 1}$ é **convergente**.

Agora vamos verificar se a série é convergente em módulo. Vamos compará-la com a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^3}{n^4-1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{n^4-1} = 1$. Segue pelo teste de comparação no limite que essas duas séries têm as mesmas propriedades de convergência. Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é divergente, concluímos que a série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n n^3}{n^4 - 1}\right|$ é **divergente**. Por tanto a série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{n^4 - 1}$ não é **absolutamente convergente**.

(b) Vamos utilizar o teste da razão. Seja $a_n = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n \sqrt{n}} x^n$. Temos que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{|x|^{n+1}}{3^{n+1}\sqrt{n+1}} \frac{3^n \sqrt{n}}{x^n} \\
&= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{n}{n+1}}|x|
\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}}|x| = \frac{1}{3}|x|$$

Logo, pelo Teste da Razão, concluímos que a série dada é convergente se $\frac{1}{3}|x| < 1$ e divergente se $\frac{1}{3} > |x|$, isto é, convergente se $|x| < 3$ e divergente se $|x| > 3$. Portanto, o raio de convergência é 3.

(c) Vamos comparar a série com $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1-\cos\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\cos\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^4}}$

Fazendo a mudança de variável $\frac{1}{x^2} = t$, temos:

$\displaystyle\lim_{t\to0^+}\frac{1-\cos t}{t^2} = \lim_{t\to0^+}\frac{\sin t}{2t} = \frac{1}{2}$. Segue pelo teste de comparação no limite que essas duas séries têm as mesmas propriedades de convergência. Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ é uma p-série com $p > 1$, sabemos que esta converge. De onde concluímos que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2\left(1-\cos\frac{1}{n^2}\right)$ converge.

Questão 2: (2,5 pontos)

Considere a equação de Euler

$$x^2y'' + 3x\,y' + \alpha y = 0.$$

Determine todos os valores de α para os quais existe ao menos uma solução não trivial $y(x)$ dessa equação tal que $\displaystyle\lim_{x\to0^+} y(x) = 0$.

Solução:

Temos a seguinte equação indicial associada a esta equação de Euler:

$$r^2 + 2r + \alpha = 0,$$

cujas raízes são $r = -1 \pm \sqrt{1-\alpha}$. Podemos identificar 3 casos distintos:

1) $\underline{\alpha = 1}$

Neste caso a equação possui duas raízes idênticas e iguais a -1. A solução é dada por

$$y(x) = c_1|x|^{-1} + c_2|x|^{-1}\ln|x|,$$

e a condição não pode ser satisfeita.

2) $\underline{\alpha < 1}$

A equação indicial possuirá duas raízes reais distintas, $r_1 = -1+\sqrt{1-\alpha}$ e $r_2 = -1-\sqrt{1-\alpha}$, e a solução da equação diferencial será dada por

$$y(x) = c_1|x|^{-1+\sqrt{1-\alpha}} + c_2|x|^{-1-\sqrt{1-\alpha}}.$$

Se $\alpha < 0$, a escolha $c_2 = 0$ torna a condição possível.

3) $\underline{\alpha > 1}$

Nesta última situação as raízes são imaginárias e dadas por $r_1 = -1 + \sqrt{|1-\alpha|}i$ e $r_2 = -1 - \sqrt{|1-\alpha|}i$, e a solução da EDO é dada por

$$y(x) = c_1 |x|^{-1} \cos\left(\sqrt{|1-\alpha|}\ln|x|\right) + c_2 |x|^{-1} \sin\left(\sqrt{|1-\alpha|}\ln|x|\right).$$

Desta forma, a equação não pode ser satisfeita neste caso.

Questão 3: (2,5 pontos)

Considere a seguinte equação de Legendre.

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0.$$

(a) (0.5) Mostre que 0 é ponto ordinário de essa equação.

(b) (1.5) Determine a relação de recorrência das soluções em séries de essa equação em torno de 0.

(c) (0.5) Determine o raio de convergência da solução que satisfaz ás condições iniciais $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$.

Solução:

(a) A equação é

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0,$$

onde

$$\begin{aligned} P(x) &= 1 - x^2, \\ Q(x) &= -2x, \\ R(x) &= 6. \end{aligned}$$

Como $P(0) = 1 \neq 0$, 0 é ponto ordinário de essa equação.

(b) A solução tem a forma

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m.$$

Derivando, temos

$$\begin{aligned} y' &= \sum_{m=1}^{\infty} m a_m x^{m-1}, \\ y'' &= \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) a_m x^{m-2}. \end{aligned}$$

Substituindo estas derivadas e y na equação, temos

$$(1-x^2)\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m x^{m-2} - 2x\sum_{m=1}^{\infty} m a_m x^{m-1} + 6\sum_{m=1}^{\infty} a_m x^m = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m x^{m-2} - \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m x^m - 2x\sum_{m=1}^{\infty} m a_m x^{m-1} + 6\sum_{m=1}^{\infty} a_m x^m = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1)a_{m+2} x^m - \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m x^m - 2x\sum_{m=1}^{\infty} m a_m x^{m-1} + 6\sum_{m=1}^{\infty} a_m x^m = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{m=2}^{\infty} \left[(m+2)(m+1)a_{m+2} - (m^2+m-6)a_m\right] x^m + [6a_3 + 4a_1]\,x + [2a_2 + 6a_0] = 0.$$

Igualando coeficientes, temos então

$$\begin{aligned} a_2 &= -3a_0, \\ a_3 &= -\frac{2}{3}a_1, \\ a_{m+2} &= \frac{(m+3)(m-2)}{(m+2)(m+1)} a_m \ \forall m \geq 2. \end{aligned}$$

(c) Pelo Teorema de Taylor, temos

$$a_0 = y(0) = 1, \quad a_1 = y'(0) = 0.$$

Segue pela relação de recorrência, $a_m = 0$ para todo m impar. Logo

$$a_2 = -3a_0 = -3, \quad a_4 = 0$$

e segue pela relação de recorrência que $a_m = 0$ para todo $m \geq 4$ par. Assim, a solução é

$$y(x) = 1 - 3x^2,$$

e, em particular, o raio de convergência é infinito.

Questão 4: (2.5 pontos)
Utilize a transformada de Laplace para determinar a solução do seguinte problema de valor inicial

$$y'' + 4y = cos(t) + \delta(t-\pi); \quad \text{com} \quad y(0) = 0, \ y'(0) = 0.$$

Solução: Aplicando a transformada de Laplace temos

$$[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] + 4\,Y(s) = \frac{s}{s^2+1} + e^{-\pi s},$$

onde $Y(s)$ é a transformada de Laplace de $y(t)$.
De onde segue a igualdade

$$Y(s) = \frac{s}{(s^2+4)(s^2+1)} + \frac{e^{-\pi s}}{s^2+4}.$$

Pelo método das frações parciais, temos

$$Y(s) = \frac{-\frac{1}{3}s}{s^2+4} + \frac{\frac{1}{3}s}{s^2+1} + \frac{e^{-\pi s}}{s^2+4}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = -\frac{1}{3}cos\,(2t) + \frac{1}{3}cos\,(t) + \frac{u_\pi(t)sen\,2(t-\pi)}{2} \\
&= \mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = -\frac{1}{3}cos\,(2t) + \frac{1}{3}cos\,(t) + \frac{u_\pi(t)sen\,(2t)}{2} \\
&= \begin{cases} -\frac{1}{3}cos\,(2t) + \frac{1}{3}cos\,(t), & se\ \ 0 \le t < \pi \\ \\ -\frac{1}{3}cos\,(2t) + \frac{1}{3}cos\,(t) + \dfrac{sen\,(2t)}{2}, & se\ \ t \ge \pi \end{cases}.
\end{aligned}$$

Transformadas de Laplace elementares.

f	$\mathcal{L}[f]$
1	$\frac{1}{s},\ s > 0$
$t^m\ (m \in \mathbb{N})$	$\frac{m!}{s^{m+1}},\ s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a},\ s > a$
$t^m e^{at}\ (m \in \mathbb{N})$	$\frac{m!}{(s-a)^{m+1}},\ s > a$
$\mathrm{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2},\ s > 0$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2},\ s > 0$
$e^{at}\mathrm{sen}(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2},\ s > a$
$e^{at}\cos(bt)$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2+b^2},\ s > a$
$\mathrm{senh}(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2},\ s > \|a\|$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2},\ s > \|a\|$
$\delta(t-a)$	e^{-as}
$u_a(t)f(t-a)$	$e^{-as}\mathcal{L}[f](s)$
$e^{at}f$	$\mathcal{L}[f](s-a)$
$f^{(m)}(t)$	$s^m\mathcal{L}[f](s) - s^{m-1}f(0) - ... - f^{(m-1)}(0)$