UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Prova Final Unificada de Cálculo IV- 2022/1, 25/07/2022[1]

Questão 1: (2.5 pontos) Encontre a relação de recorrência dos coeficientes de uma solução em série de potências em torno de $x = 1$ da equação diferencial $y'' - xy' - y = 0$.

Questão 2: (2,5 pontos)

Encontre a solução do problema de valor inicial $y'' + y = f(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, onde

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 3\pi, \\ 0, & t \geq 3\pi. \end{cases}$$

Questão 3: (2,5 pontos)

Seja $f\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \pi, \\ 2, & \pi \leq x < 2\pi. \end{cases}$$

(a) Dê a expressão para a extensão par e periódica de período 4π da

(b) Determine a série de Fourier da função encontrada no item (a).

(c) Encontre a soma da série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Questão 4: (2.5 pontos)

Resolva o problema de condução de calor em uma barra de comprimento 1 metro e com extremidades isoladas:

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_t,\ 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u_x(0,t) &= 0,\ u_x(1,t) = 0,\ t > 0, \\ u(x,0) &= x,\ 0 < x < 1. \end{aligned}$$

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.
FÓRMULAS ÚTEIS NO VERSO!

Autovalores e Autofunções

O problema

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \\ y'(0) = 0, y'(L) = 0, \end{cases}$$

tem autovalores $\lambda = n^2\pi^2/L^2$, $n \in \{0, 1, 2, 3, ...\}$, e as autofunções correspondentes são

$$y_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \; n \geq 0.$$

Solução da Equação de Segundo Grau

Se r_1, r_2 são as raízes da equação caraterística associada a equação

$$ay'' + by' + cy = 0$$

então a solução geral dessa equação é:

- $y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 x e^{r_1 x}$ se $r_1 = r_2 \in \mathbb{R}$.
- $y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$ se $r_1 \neq r_2$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$.
- $y(x) = e^{\alpha x}\Big(c_1 \cos(\beta x) + c_2 \operatorname{sen}(\beta x)\Big)$ se $r_1 = \alpha + i\beta$ e $r_2 = \alpha - i\beta$.

Transformadas de Laplace elementares.

f	$\mathcal{L}[f]$
1	$\frac{1}{s}, \; s > 0$
$t^m \; (m \in \mathbb{N})$	$\frac{m!}{s^{m+1}}, \; s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \; s > a$
$t^m e^{at} \; (m \in \mathbb{N})$	$\frac{m!}{(s-a)^{m+1}}, \; s > a$
$\operatorname{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}, \; s > 0$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}, \; s > 0$
$e^{at}\operatorname{sen}(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}, \; s > a$
$e^{at}\cos(bt)$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2+b^2}, \; s > a$
$\operatorname{senh}(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}, \; s > \lvert a\rvert$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}, \; s > \lvert a\rvert$
$\delta(t-a)$	e^{-as}
$u_a(t)f(t-a)$	$e^{-as}\mathcal{L}[f](s)$
$e^{at}f$	$\mathcal{L}[f](s-a)$
$f^{(m)}(t)$	$s^m\mathcal{L}[f](s) - s^{m-1}f(0) - ... - f^{(m-1)}(0)$