UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Segunda Prova Unificada de Cálculo IV- 2022/1, 11/07/2022[1]

Questão 1: (2,5 pontos)

Encontre todas as soluções $u(x,y) = X(x)Y(y)$ do problema

$$\begin{cases} u_x + u_y = u, \\ u(0,0) = 1\ . \end{cases}$$

Questão 2: (2.5 pontos)

Seja $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = 1 - x.$$

(a) Seja $\tilde{f}$ a extensão ímpar e periódica de período 2 da função f. Esboce o gráfico de $\tilde{f}$ no intervalo $[-4,2]$.

(b) Encontre a série de Fourier de $\tilde{f}$.

Questão 3: (2,5 pontos)

Encontre a solução $u : [0,4] \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ do seguinte problema de contorno:

$$\begin{aligned} &u_{xx} - u_t = u,\ (x,t) \in (0,4) \times (0,\infty) \\ &u(0,t) = u(4,t) = 0,\ t > 0 \\ &u(x,0) = f(x), \end{aligned}$$

onde $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ é a função

$$f(x) = \begin{cases} x, & se \quad 0 \le x < 2 \\ 0, & se \quad 2 \le x \le 4 \end{cases}$$

Questão 4: (2.5 pontos)

Resolva o problema:

$$\begin{cases} u_{xx} = u_{tt}, & 0 < x < 10,\ t > 0, \\ u(0,t) = 0,\ u(10,t) = 0, & t \ge 0, \\ u(x,0) = 0, & 0 \le x \le 10, \\ u_t(x,0) = \dfrac{1}{5}\text{sen}\dfrac{3\pi x}{10} + \dfrac{2}{5}\text{sen}\dfrac{7\pi x}{10}, & 0 \le x \le 10. \end{cases}$$

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.
FÓRMULAS ÚTEIS NO VERSO!

Autovalores e Autofunções

O problema

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \\ y(0) = 0, y(L) = 0, \end{cases}$$

tem autovalores $\lambda = n^2\pi^2/L^2$, $n \in \{1, 2, 3, ...\}$, e as autofunções correspondentes são

$$y_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \ n \geq 1.$$

Solução da Equação de Segundo Grau

Se r_1, r_2 são as raizes da equação caraterística associada a equação

$$ay'' + by' + cy = 0$$

então a solução geral dessa equação é:

- $y(x) = c_1 e^{r_1} + c_2 x e^{r_1}$ se $r_1 = r_2 \in \mathbb{R}$.
- $y(x) = c_1 e^{r_1} + c_2 e^{r_2}$ se $r_1 \neq r_2$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$.
- $y(x) = e^{\alpha}\Big(c_1 \cos(\beta x) + c_2 \operatorname{sen}(\beta x)\Big)$ se $r_1 = \alpha + i\beta$ e $r_2 = \alpha - i\beta$.