



Primeira Prova Unificada de Cálculo IV- 2022/1, 02/06/2022<sup>1</sup>

**Questão 1:** (2,5 pontos)

Determine a convergência, convergência absoluta ou divergência das séries abaixo. Justifique.

- (a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n \ln n}{(n+2)^3}$ .  
(b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (n!)^2}{(2n)!}$ .

**Questão 2:** (2.5 pontos)

Considere a função real

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}.$$

- (a) Use derivação para encontrar uma representação em séries de potências centrada em  $x = 0$  para a função  $f$ .  
(b) Determine o raio e o intervalo de convergência da série de potências encontrada no item (a).  
(c) Encontrar uma expansão em séries de potências para a função

$$g(x) = \frac{x^2}{(1+x)^3}.$$

**Questão 3:** (2,5 pontos)

Considere a equação diferencial

$$x^2 y'' + (x^2 - \frac{3}{4})y = 0.$$

- (a) Mostre que  $x = 0$  é ponto singular regular dessa equação.  
(b) Calcule as raízes da equação indicial da equação.  
(c) Obtenha a relação de recorrência da solução em série associada à maior das duas raízes encontradas no item (b) e calcule todos os coeficientes com índice ímpar.

**Question 4:** (2.5 pontos)

Utilize a transformada de Laplace para determinar a solução do seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + 4y = u_1(t)t \\ y(0) = 0, y'(0) = 1, \end{cases}$$

onde  $u_1(t)$  é a função degrau unitário com descontinuidade em 1.

**Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.  
FÓRMULAS ÚTEIS NO VERSO!**

<sup>1</sup>É permitida a cópia, reprodução e distribuição deste texto, no todo ou em parte, apenas para fins não lucrativas.

Transformadas de Laplace elementares.

$f$	$\mathcal{L}[f]$
1	$\frac{1}{s}, s > 0$
$t^m (m \in \mathbb{N})$	$\frac{m!}{s^{m+1}}, s > 0$
$e^{at}$	$\frac{1}{s-a}, s > a$
$t^m e^{at} (m \in \mathbb{N})$	$\frac{m!}{(s-a)^{m+1}}, s > a$
$\text{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2 + a^2}, s > 0$
$\text{cos}(at)$	$\frac{s}{s^2 + a^2}, s > 0$
$e^{at}\text{sen}(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}, s > a$
$e^{at}\text{cos}(bt)$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2 + b^2}, s > a$
$\text{senh}(at)$	$\frac{a}{s^2 - a^2}, s >  a $
$\text{cosh}(at)$	$\frac{s}{s^2 - a^2}, s >  a $
$\delta(t-a)$	$e^{-as}$
$u_a(t)f(t-a)$	$e^{-as}\mathcal{L}[f](s)$
$e^{at}f$	$\mathcal{L}[f](s-a)$
$f^{(m)}(t)$	$s^m\mathcal{L}[f](s) - s^{m-1}f(0) - \dots - f^{(m-1)}(0)$