UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Gabarito Segunda Prova Unificada de Cálculo IV- 2022/1, 11/07/2022[1]

Questão 1: (2,5 pontos)

Encontre todas as soluções $u(x,y) = X(x)Y(y)$ do problema

$$\begin{cases} u_x + u_y = u, \\ u(0,0) = 1\ . \end{cases}$$

Solução

Como $u(x,y) = X(x)Y(y)$, substituindo na equação diferencial temos que

$$X'Y + XY' = XY \ \Rightarrow\ \frac{X'}{X} = 1 - \frac{Y'}{Y} = \lambda,$$

onde λ é constante. Logo

$$X' - \lambda X = 0 \text{ e } Y' + (1-\lambda)Y = 0$$

com solução geral

$$X(x) = Ae^{\lambda x} \text{ e } Y(y) = Be^{(\lambda-1)y}.$$

Assim

$$u(x,y) = ABe^{\lambda x + (\lambda-1)y}.$$

Pela condição do problema, $1 = u(0,0) = ABe^{\lambda 0 + (\lambda-1)0} = AB$, logo

$$u(x,y) = e^{\lambda x + (\lambda-1)y}.$$

Questão 2: (2.5 pontos)

Seja $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = 1 - x.$$

(a) Seja $\tilde{f}$ a extensão ímpar e periódica de período 2 da função f. Esboce o gráfico de $\tilde{f}$ no intervalo $[-4,2]$.
solução

(b) Encontre a série de Fourier de $\tilde{f}$.
Solução
Como $\tilde{f}$ é uma extensão ímpar de f, então

$$SF[\tilde{f}] = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{sen}(k\pi x),$$

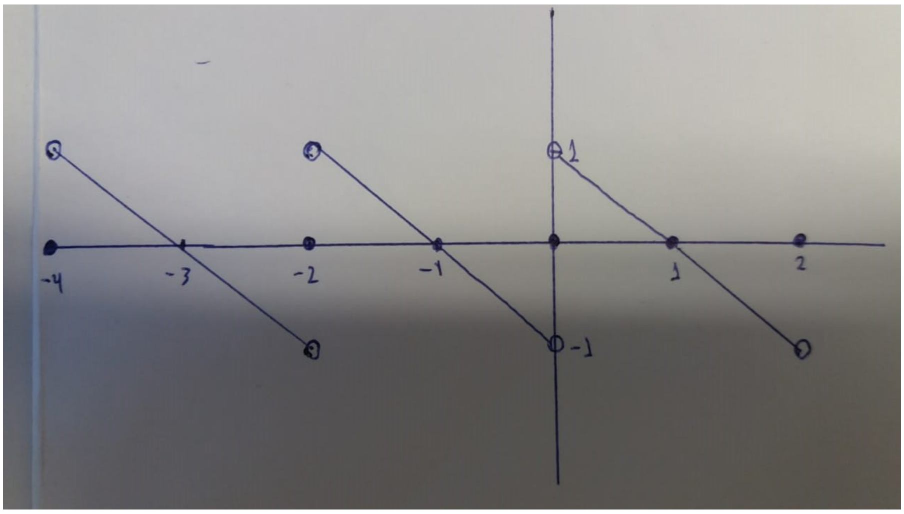

Figura 1:

onde

$$
\begin{aligned}
b_k &= 2\int_0^1 f(x)\text{sen}(k\pi x)\,dx = 2\int_0^1 (1-x)\text{sen}(k\pi x)\,dx \\
&= -\frac{2}{k\pi}(1-x)\cos(k\pi x)\Big|_0^1 - \frac{2}{k\pi}\int_0^1 \cos(k\pi x)\,dx = \frac{2}{k\pi} - \Big(\frac{2}{k\pi}\Big)^2 \text{sen}(k\pi x)\Big|_0^1 \\
&= \frac{2}{k\pi}
\end{aligned}
$$

Logo série de Fourier de $\tilde{f}$ é

$$SF[\tilde{f}] = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{sen}(k\pi x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi}\text{sen}(k\pi x)$$

Questão 3: (2,5 pontos)

Encontre a solução $u : [0,4]\times[0,\infty) \to \mathbb{R}$ do seguinte problema de contorno:

$$
\begin{aligned}
&u_{xx} - u_t = u, \;\; (x,t) \in (0,4)\times(0,\infty) \\
&u(0,t) = u(4,t) = 0, \;\; t > 0 \\
&u(x,0) = f(x),
\end{aligned}
$$

onde $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ é a função

$$f(x) = \begin{cases} x, & se \;\; 0 \le x < 2 \\ 0, & se \;\; 2 \le x \le 4 \end{cases}$$

Solução

Usando o método de separação de variáveis, procuramos soluções não nulas na forma $u(x,t) = X(x)T(t)$. Substituindo essa expressão na equação diferencial obtemos

$$X''T - XT' = XT \Rightarrow X''T = X(T' + T) \Rightarrow \frac{X''}{X}(x) = \frac{T' + T}{T}(t) = -\lambda,$$

onde λ constante, pois x, t são variáveis independentes. Segue que

$$X'' + \lambda X = 0 \quad \text{e} \quad T'' + (\lambda+1)T = 0. \qquad \text{(I)}$$

Usando as condições de contorno $u(0,t) = u(4,t) = 0$ encontramos

$$X(0)T(t) = X(4)T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = X(4) = 0,$$

as quais, juntamente com a primeira equação de (I), compõem o problema de autovalores

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(4) = 0, \end{cases}$$

cujos autovalores e correspondentes autofunções estão indicados no verso da prova e são

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{16} \quad \text{e} \quad X_n(x) = \text{sen}\frac{n\pi x}{4},\ n = 1, 2, \ldots. \qquad \text{(II)}$$

Substituimos $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{16}$ na segunda equação de (I):

$$T' = \left(-\frac{n^2\pi^2}{16} - 1\right)T$$

cuja solução geral é:

$$T_n(t) = A_n e^{-\left(1+\frac{n^2\pi^2}{16}\right)t}$$

onde A constante arbitrária.
Agora fazemos a superposição das funções $u_n(x,t) = X_n(t)T_n(t)$ e consideramos a solução $u(x,t)$ de forma:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{4}\right) e^{-\left(1+\frac{n^2\pi^2}{16}\right)t},\ x \in [0,4],\ t \geq 0$$

Usando a condição $f(x) = u(x,0) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{4}\right)$, segue que a_n devem ser os coeficientes em séries de senos da função $f(x)$ no intervalo $[0,4]$, ou seja

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{4}\int_0^4 f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{4}\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x\sin\left(\frac{n\pi x}{4}\right)dx \\ &= -\frac{1}{2}\frac{4}{n\pi}\left[x\cos\frac{n\pi x}{4}\Big|_0^2 - \int_0^2 \cos\frac{n\pi x}{4}dx\right] = -\frac{2}{n\pi}\left[2\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{4}\Big|_0^2\right] \\ &= -\frac{4}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{8}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} \end{aligned}$$

Então segue a solução do problema:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{4}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{8}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{4}\right)e^{-\left(1+\frac{n^2\pi^2}{16}\right)t},\ x \in [0,4],\ t \geq 0.$$

Questão 4: (2.5 pontos)
Resolva o problema:

$$\begin{cases} u_{xx} = u_{tt}, & 0 < x < 10,\ t > 0, \\ u(0,t) = 0,\ u(10,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq 10, \\ u_t(x,0) = \frac{1}{5}\text{sen}\frac{3\pi x}{10} + \frac{2}{5}\text{sen}\frac{7\pi x}{10}, & 0 \leq x \leq 10. \end{cases}$$

Solução
Usando o método de separação de variáveis, procuramos soluções não nulas na forma $u(x,t) = X(x)T(t)$. Substituindo essa expressão na equação diferencial obtemos

$$X''T = XT'' \Rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{T''}{T} \Rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{T''}{T} = -\lambda \text{ (uma constante)},$$

que resulta nas EDOs

$$X'' + \lambda X = 0 \quad \text{e} \quad T'' + \lambda T = 0. \qquad \text{(I)}$$

Usando as condições de contorno $u(0,t) = u(10,t) = 0$ encontramos

$$X(0)T(t) = X(10)T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = X(10) = 0,$$

as quais, juntamente com a primeira equação de (I), compõem o problema de autovalores

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(10) = 0, \end{cases}$$

cujos autovalores e correspondentes autofunções estão indicados no verso da prova e são

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{100} \quad \text{e} \quad X_n(x) = \text{sen}\frac{n\pi x}{10},\ n = 1, 2, \ldots . \qquad \text{(II)}$$

Da primeira condição inicial, $u(x,0) = 0$, obtemos

$$X(x)T(0) = 0 \Rightarrow T(0) = 0.$$

Esse resultado, com a segunda equação em (I) e os valores de λ_n obtidos em (II) formam o problema

$$\begin{cases} T'' + \dfrac{n^2\pi^2}{100}T = 0 \\ T(0) = 0, \end{cases}$$

cujas soluções são

$$T_n(t) = c_n\text{sen}\frac{n\pi t}{10},\ n = 1, 2, \ldots, \qquad \text{(III)}$$

onde cada c_n é uma constante arbitrária.
De (II) e (III) temos as funções

$$u_n(x,t) = \text{sen}\frac{n\pi x}{10}\text{sen}\frac{n\pi t}{10},\ n = 1, 2, \ldots,$$

que verificam a equação diferencial, as condições de contorno e a primeira condição inicial. Pelo princípio da superposição, essas mesmas condições são verificadas por

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n\text{sen}\frac{n\pi x}{10}\text{sen}\frac{n\pi t}{10}\,.$$

Falta apenas que a segunda condição inicial seja satisfeita. Teremos,

$$u_t(x,0) = \frac{1}{5}\text{sen}\frac{3\pi x}{10} + \frac{2}{5}\text{sen}\frac{7\pi x}{10} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{10}k_n\text{sen}\frac{n\pi x}{10},$$

o que nos dá,

$$\frac{3\pi}{10}k_3 = \frac{1}{5}, \quad \frac{7\pi}{10}k_7 = \frac{2}{5} \quad \text{e} \quad k_n = 0 \text{ se } n \neq 3 \text{ e } n \neq 7.$$

Logo,

$$u(x,t) = \frac{2}{3\pi}\text{sen}\frac{3\pi x}{10}\text{sen}\frac{3\pi t}{10} + \frac{4}{7\pi}\text{sen}\frac{7\pi x}{10}\text{sen}\frac{7\pi t}{10}\,.$$

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.
FÓRMULAS ÚTEIS NO VERSO!

Autovalores e Autofunções

O problema

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \\ y(0) = 0, y(L) = 0, \end{cases}$$

tem autovalores $\lambda = n^2\pi^2/L^2$, $n \in \{1, 2, 3, ...\}$, e as autofunções correspondentes são

$$y_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \ n \geq 1.$$

Solução da Equação de Segundo Grau

Se r_1, r_2 são as raízes da equação caraterística associada a equação

$$ay'' + by' + cy = 0$$

então a solução geral dessa equação é:

- $y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 x e^{r_1 x}$ se $r_1 = r_2 \in \mathbb{R}$.
- $y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$ se $r_1 \neq r_2$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$.
- $y(x) = e^{\alpha x}\Big(c_1 \cos(\beta x) + c_2 \operatorname{sen}(\beta x)\Big)$ se $r_1 = \alpha + i\beta$ e $r_2 = \alpha - i\beta$.