UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Gabarito Primeira Prova Unificada de Cálculo IV- 2022/1, 02/06/2022[1]

Questão 1: (2,5 pontos)

Determine a convergência, convergência absoluta ou divergência das séries abaixo. Justifique.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n \ln n}{(n+2)^3}$.

Solução

Se $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1} n \ln n}{(n+2)^3}$, então $|a_n| = \frac{n \ln n}{(n+2)^3} < \frac{\ln n}{n^2}$, pois $(n+2)^4 > n^4$ para $n \geq 1$.

Integrando por partes temos

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx = \lim_{A\to\infty} \Big(-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} \Big)\Big|_1^A = 1 - \lim_{A\to\infty} \Big(\frac{\ln A}{A} + \frac{1}{A} \Big) = 1,$$

pois $\displaystyle\lim_{A\to\infty} \frac{\ln A}{A} = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{A} = 0$.

Assim, o teste da integral implica que a série $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ converge, e portanto o teste de comparação garante que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \ln n}{(n+2)^3}$ convergente.

Logo podemos concluir que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n \ln n}{(n+2)^3}$ é absolutamente convergente.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (n!)^2}{(2n)!}$.

Solução

Tome $a_n = \frac{3^n (n!)^2}{(2n)!}$, então

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \Big|\frac{a_{n+1}}{a_n}\Big| &= \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1} (n+1)!^2}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{3^n n!^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{3(n^2+2n+1)}{4n^2+6n+2} = \frac{3}{4} < 1. \end{aligned}$$

O teste da Razão nos permite concluir que a série é absolutamente convergente.

Questão 2: (2.5 pontos)

Considere a função real

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}\,.$$

(a) Use derivação para encontrar uma representação em séries de potências centrada em $x = 0$ para a função f.
Solução
Note que

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \ ,$$

série geométrica convergente se $|-x| = 1$, ou seja, para $|x| < 1$. Assim,

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{1+x}\right) = -\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n\right] \ .$$

Derivando termo a termo,

$$f(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n x^{n-1} \ .$$

Modificando o índice em 1 e sabendo que $(-1)^{n+2} = (-1)^n$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+2}(n+1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n \ .$$

(b) Determine o raio e o intervalo de convergência da série de potências encontrada no item (a).
Solução
Como o raio de convergência de $\frac{1}{1+x}$ é de $R = 1$, temos que o raio de convergência de $f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+x}\right)$ é também de $R = 1$. Além disso, já sabemos que a série converge para $|x| < 1$. Ou seja, resta analisar a convergência da série de potência para os casos em que $|x| = 1$, ou seja, $x = \pm 1$. Se $x = -1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \ ,$$

que diverge pelo critério da divergência do termo geral. Para $x = 1$, obtém-se a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \ ,$$

que verifica-se de forma análoga que também diverge. Portanto, o intervalo de convergência para a série de potências obtida no item (a) é $(-1, 1)$.

(c) Encontrar uma expansão em séries de potências para a função

$$g(x) = \frac{x^2}{(1+x)^3}.$$

Solução
Note que

$$\frac{1}{(1+x)^3} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{(1+x)^2}\right) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n\right] \ .$$

Passando o $-\frac{1}{2}$ para dentro da série e derivando termo a termo,

$$\frac{1}{(1+x)^3} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+1)nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+2)(n+1)}{2}x^n\ .$$

Multiplicando por x^2,

$$g(x) = \frac{x^2}{(1+x)^3} = x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+2)(n+1)}{2}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+2)(n+1)}{2}x^{n+2}.$$

Para escrever a série em termos de x^n, modifica-se o índice em 2 para obter

$$g(x) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n(n-1)}{2}x^n\ .$$

Questão 3: (2,5 pontos)

Considere a equação diferencial

$$x^2y'' + (x^2 - \frac{3}{4})y = 0.$$

(a) Mostre que $x = 0$ é ponto singular regular dessa equação.

Solução

Como $P(x) = x^2$, $Q(x) = 0$ e $R(x) = x^2 - \frac{3}{4}$ são polinômios, e como $\lim_{x\to 0} x\dfrac{Q(x)}{P(x)} = 0 = p_0$ e $\lim_{x\to 0} x^2\dfrac{R(x)}{P(x)} = -\dfrac{3}{4} = q_0$ são finitos, então $x = 0$ é ponto singular regular da equação.

(b) Calcule as raízes da equação indicial da equação.

Solução

A equação indicial será $r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = 0$, ou seja, $r^2 - r - \frac{3}{4} = 0$, cujas raízes são $-\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{2}$.

(c) Obtenha a relação de recorrência da solução em série associada à maior das duas raízes encontradas no item (b) e calcule todos os coeficientes com índice ímpar.

Solução

Vamos procurar uma solução na forma $y = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+3/2}$. Substituindo essa expressão na equação encontramos

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+\frac{3}{2})(n+\frac{1}{2})a_n x^{n+3/2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+7/2} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3}{4}a_n x^{n+3/2} = 0.$$

Igualando os expoentes de x e os índices iniciais dos somatórios obtemos

$$3a_1x^{5/2} + \sum_{n=2}^{\infty}\left[(n^2+2n)a_n + a_{n-2}\right]x^{n+3/2} = 0,$$

que nos dá a relação de recorrência

$$a_1 = 0, \quad a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n+2)},\ n \geq 2.$$

Além disso, pela relação anterior $0 = a_3 = a_5 = \cdots = a_{2n+1} = \cdots$ para todo n.

Question 4: (2.5 pontos)
Utilize a transformada de Laplace para determinar a solução do seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + 4y = u_1(t)t \\ y(0) = 0, \;\; y'(0) = 1, \end{cases}$$

onde $u_1(t)$ é a função degrau unitário com descontinuidade em 1.

Solução
Para usar corretamente a tabela de transformadas de Laplace, podemos escrever o problema de condição inicial como

$$\begin{cases} y'' + 4y = u_1(t)(t-1) + u_1(t) \cdot 1 \\ y(0) = 0, y'(0) = 1, \end{cases}$$

aplicamos a transformada de Laplace para obter $Y(s) := \mathcal{L}[y](s)$ que satisfaz

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4Y(s) = e^{-s}\Big(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}\Big).$$

Substituindo os valores iniciais, resulta na equação

$$Y(s)(s^2+4) - 1 = e^{-s}\frac{1+s}{s^2}.$$

Resolvendo para $Y(s)$ resulta em

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+4} + e^{-s}\frac{1+s}{s^2(s^2+4)}.$$

$$\frac{1+s}{s^2(s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs+D}{s^2+4}$$

segue $A = B = \frac{1}{4}$, $C = D = -\frac{1}{4}$, e portanto Assim

$$Y(s) = \frac{1}{2}\frac{2}{s^2+2^2} + \frac{1}{4}e^{-s}\Big(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{2}\frac{2}{s^2+2^2} - \frac{s}{s^2+2^2}\Big).$$

Usando a tabela para encontrar as transformações inversas resulta em

$$\begin{aligned} y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y](t) &= \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t) + \frac{1}{4}u_1(t)\Big(1 + t - 1 - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2(t-1)) - \cos(2(t-1))\Big) \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t) + \frac{1}{4}u_1(t)\Big(t - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2(t-1)) - \cos(2(t-1))\Big). \end{aligned}$$

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.
FÓRMULAS ÚTEIS NO VERSO!

Transformadas de Laplace elementares.

f	$\mathcal{L}[f]$
1	$\frac{1}{s},\ s > 0$
$t^m\ (m \in \mathbb{N})$	$\frac{m!}{s^{m+1}},\ s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a},\ s > a$
$t^m e^{at}\ (m \in \mathbb{N})$	$\frac{m!}{(s-a)^{m+1}},\ s > a$
$\mathrm{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2},\ s > 0$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2},\ s > 0$
$e^{at}\mathrm{sen}(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2},\ s > a$
$e^{at}\cos(bt)$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2+b^2},\ s > a$
$\mathrm{senh}(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2},\ s > \|a\|$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2},\ s > \|a\|$
$\delta(t-a)$	e^{-as}
$u_a(t)f(t-a)$	$e^{-as}\mathcal{L}[f](s)$
$e^{at}f$	$\mathcal{L}[f](s-a)$
$f^{(m)}(t)$	$s^m\mathcal{L}[f](s) - s^{m-1}f(0) - ... - f^{(m-1)}(0)$