UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Gabarito Prova Final Unificada de Cálculo IV- 2022/1, 25/07/2022[1]

Questão 1: (2.5 pontos) Encontre a relação de recorrência dos coeficientes de uma solução em série de potências em torno de $x = 1$ da equação diferencial $y'' - xy' - y = 0$.

Solução

Se substituirmos a série $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$ diretamente na equação, teremos um problema no cálculo do produto xy' (experimente!). Evitaremos essa situação fazendo a mudança de variável $t = x - 1$, obtendo $y(x) = y(t+1) := z(t)$, com $y'(x) = z'(t)$ e $y''(x) = z''(t)$. Assim, a equação ficará

$$z'' - (t+1)z' - z = 0,$$

onde procuramos uma solução na forma $z(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$.

Como, $z' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1}$ e $z'' = \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)n a_n t^{n-2}$, substituindo na equação obtemos

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)n a_n t^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^n - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0.$$

Igualando os expoentes de t,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}t^n - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}t^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0.$$

Igualando os valores iniciais dos índices dos somatórios,

$$2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}t^n - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^n - a_1 - \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}t^n - a_0 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n = 0,$$

ou seja,

$$2a_2 - a_1 - a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\big[(n+2)a_{n+2} - (a_{n+1} + a_n)\big]t^n = 0.$$

Então, da unicidade do desenvolvimento em série de potências,

$$2a_2 - a_1 - a_0 = 0 \quad \text{e} \quad (n+1)\big[(n+2)a_{n+2} - (a_{n+1} + a_n)\big] = 0,\ n = 1, 2, 3, \ldots,$$

e a relação de recorrência será

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + a_n}{n+2},\ n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Questão 2: (2,5 pontos)

Encontre a solução do problema de valor inicial $y'' + y = f(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, onde

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 3\pi, \\ 0, & t \geq 3\pi. \end{cases}$$

Solução

Note que $f(t) = 1 - u_{3\pi}(t), t \geq 0$, onde $u_{3\pi}(t)$ é a função degrau unitário com descontinuidade em 3π.

Aplicamos a transformada de Laplace para obter $Y(s) := \mathcal{L}[y](s)$ que satisfaz

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{3\pi s}}{s} \,.$$

Substituindo os valores iniciais, resulta na equação

$$(s^2 + 1)Y(s) - 1 = \frac{1}{s} - \frac{e^{3\pi s}}{s} \,.$$

Resolvendo para $Y(s)$ resulta em

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{1}{s(s^2 + 1)} - \frac{e^{3\pi s}}{s(s^2 + 1)} \,.$$

De

$$\frac{1}{s(s^2 + 1)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 1}$$

segue que $A = 1$, $B = 1$ e $C = 0$. Assim,

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 1} - e^{3\pi s} \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 1} \right) \,.$$

Usando a tabela para encontrar as transformações inversas resulta em

$$\begin{aligned} y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y](t) &= \operatorname{sen}(t) + 1 - \cos(t) - u_{3\pi}(t) \left(1 - \cos(t - 3\pi)\right) \\ &= \operatorname{sen}(t) + 1 - \cos(t) - u_{3\pi}(t) \left(1 + \cos(t)\right) \,. \end{aligned}$$

Questão 3: (2,5 pontos)

Seja $f\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \pi, \\ 2, & \pi \leq x < 2\pi. \end{cases}$$

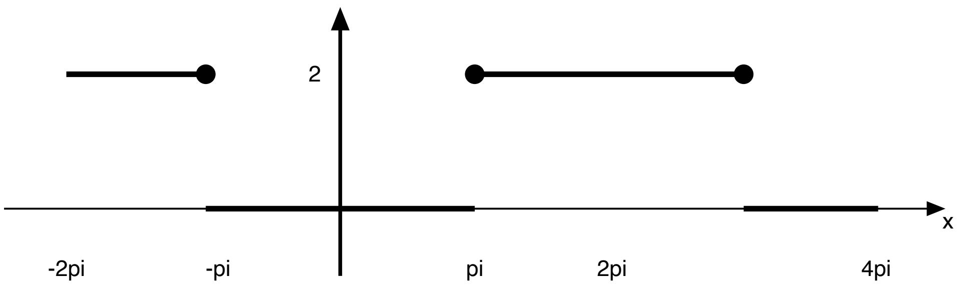
(a) Dê a expressão para a extensão par e periódica de período 4π da função f e esboce seu gráfico no intervalo $[-2\pi, 4\pi]$.

Solução

A extensão pedida é definida por

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 2, & -2\pi \leq x < -\pi, \\ 0, & -\pi < x < \pi, \\ 2, & \pi \leq x < 2\pi, \end{cases}$$

com $\tilde{f}(x + 4\pi) = \tilde{f}(x)$



(b) Determine a série de Fourier da função encontrada no item (a).

Solução

Sendo uma extensão par e periódica de período 4π, os coeficientes b_k da sua série de Fourier são nulos e para $k = 1, 2, ...$

$$a_k = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(\frac{k\pi x}{2\pi})\,dx = \frac{2}{\pi}\int_\pi^{2\pi} \cos\frac{kx}{2}\,dx = -\frac{4}{k\pi}\text{sen}\frac{k\pi}{2}, \quad a_0 = 2$$

tem-se

$$SF[\tilde{f}](x) \;=\; 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k\pi}\text{sen}\frac{k\pi}{2}\cos\frac{kx}{2} = 1 - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}\cos\frac{(2n+1)x}{2}$$

(c) Encontre a soma da série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Solução

Como $x = 0$ é ponto de continuidade de $\tilde{f}$, pelo teorema de Fourier, tem-se

$$SF[\tilde{f}](0) = 0 = 1 - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}$$

e segue

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)} = \frac{\pi}{4}.$$

Questão 4: (2.5 pontos)

Resolva o problema de condução de calor em uma barra de comprimento 1 metro e com extremidades isoladas:

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_t,\ 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u_x(0,t) &= 0,\ u_x(1,t) = 0,\ t > 0, \\ u(x,0) &= x,\ 0 < x < 1. \end{aligned}$$

Solução
Usando o método de separação de variáveis, procuramos soluções não nulas na forma $u(x,t) = X(x)T(t)$. Substituindo essa expressão na equação diferencial obtemos

$$X''T = XT' \Rightarrow \frac{X''}{X}(x) = \frac{T'}{T}(t) = -\lambda,$$

onde λ constante, pois x, t são variáveis independentes. Segue que

$$X'' + \lambda X = 0 \quad \text{e} \quad T' + \lambda T = 0. \qquad \text{(I)}$$

Usando as condições de contorno $u_x(0,t) = u_x(4,t) = 0$ encontramos

$$X'(0)T(t) = X'(0)T(t) = 0 \Rightarrow X'(0) = X'(1) = 0,$$

as quais, juntamente com a primeira equação de (I), compõem o problema de autovalores

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = X'(1) = 0, \end{cases}$$

cujos autovalores e correspondentes autofunções estão indicados no verso da prova e são

$$\lambda_n = n^2\pi^2 \quad \text{e} \quad X_n(x) = \cos n\pi x,\ n = 0, 1, 2, \ldots. \qquad \text{(II)}$$

Substituimos $\lambda_n = n^2\pi^2$ na segunda equação de (I):

$$T' = -n^2\pi^2 T$$

cuja solução geral é:

$$T_n(t) = A_n e^{-n^2\pi^2 t}$$

onde A_n constante arbitrária.
Agora fazemos a superposição das funções $u_n(x,t) = X_n(t)T_n(t)$ e consideramos a solução $u(x,t)$ de forma:

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2}u_0(x,y) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x\, e^{n^2\pi^2 t},\ x \in [0,1],\ t \geq 0$$

Usando a condição $f(x) = u(x,0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x$, segue que a_n devem ser os coeficientes em séries de cossenos da função $f(x) = x$ no intervalo $[0,1]$, ou seja $a_0 = \frac{2}{1}\int_0^1 f(x)dx = 2\int_0^1 x\,dx = 1$, e

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{1}\int_0^1 f(x)\cos n\pi x dx = 2\int_0^1 x\cos n\pi x\,dx \\ &= \frac{2}{n\pi}\left[x\cos n\pi x\Big|_0^1 - \int_0^1 \operatorname{sen} n\pi x\,dx\right] = \frac{2}{n\pi}\left[\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x\Big|_0^1\right] \\ &= \frac{2}{(n\pi)^2}(\cos n\pi - 1) = \frac{2}{(n\pi)^2}((-1)^n - 1). \end{aligned}$$

Então segue a solução do problema:

$$u(x,t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n\pi)^2}((-1)^n - 1)\cos n\pi x\, e^{-n^2\pi^2 t},\ x \in [0,1],\ t \geq 0.$$

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.
FÓRMULAS ÚTEIS NO VERSO!

Autovalores e Autofunções

O problema

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \\ y'(0) = 0, y'(L) = 0, \end{cases}$$

tem autovalores $\lambda = n^2\pi^2/L^2$, $n \in \{0, 1, 2, 3, ...\}$, e as autofunções correspondentes são

$$y_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \ n \geq 0.$$

Solução da Equação de Segundo Grau

Se r_1, r_2 são as raízes da equação caraterística associada a equação

$$ay'' + by' + cy = 0$$

então a solução geral dessa equação é:

- $y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 x e^{r_1 x}$ se $r_1 = r_2 \in \mathbb{R}$.
- $y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$ se $r_1 \neq r_2$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$.
- $y(x) = e^{\alpha x}\Big(c_1 \cos(\beta x) + c_2 \operatorname{sen}(\beta x)\Big)$ se $r_1 = \alpha + i\beta$ e $r_2 = \alpha - i\beta$.

Transformadas de Laplace elementares.

f	$\mathcal{L}[f]$
1	$\frac{1}{s}, \ s > 0$
$t^m \ (m \in \mathbb{N})$	$\frac{m!}{s^{m+1}}, \ s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \ s > a$
$t^m e^{at} \ (m \in \mathbb{N})$	$\frac{m!}{(s-a)^{m+1}}, \ s > a$
$\operatorname{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}, \ s > 0$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}, \ s > 0$
$e^{at}\operatorname{sen}(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}, \ s > a$
$e^{at}\cos(bt)$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2+b^2}, \ s > a$
$\operatorname{senh}(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}, \ s > \lvert a\rvert$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}, \ s > \lvert a\rvert$
$\delta(t-a)$	e^{-as}
$u_a(t)f(t-a)$	$e^{-as}\mathcal{L}[f](s)$
$e^{at}f$	$\mathcal{L}[f](s-a)$
$f^{(m)}(t)$	$s^m\mathcal{L}[f](s) - s^{m-1}f(0) - ... - f^{(m-1)}(0)$