Questão 1: (2.5 pontos)

Calcule a integral

$$I = \iint_D \frac{(x+y)e^{(x+y)^2+(x-y)^2}}{\sqrt{2x^2+2y^2}} dxdy \ ,$$

onde $D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2 \leq 1 \text{ and } x-y \geq 0\Big\}$.

Sugestão: use a mudança de variáveis $(u,v) = (x+y, x-y)$.

Solução:

Seguindo a sugestão, usamos a mudança linear $(u,v) = (x+y, x-y)$. Então calculamos o jacobiano $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = -2 \ \Rightarrow \ \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -\frac{1}{2}$. Alem disso,

$$(x,y) \in D \quad \Leftrightarrow \quad (u,v) \in \widetilde{D} = \Big\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \ : \ u^2+v^2 \leq 2, \text{ e } v \geq 0\Big\}.$$

Logo, vale pela fórmula de mudança de variáveis

$$I = \frac{1}{2} \iint_{\widetilde{D}} \frac{ue^{u^2+v^2}}{\sqrt{u^2+v^2}} dudv \ .$$

Agora, passamos em coordenadas polares (r,θ) com $(u,v) = (r\cos\theta, r \operatorname{sen}\theta)$. Verificamos que $\frac{\partial(u,v)}{\partial(r,\theta)} = r$ e que $(u,v) \in \widetilde{D} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq r \leq \sqrt{2}, \ 0 \leq \theta \leq \pi$. Portanto, vale pela fórmula de mudança de variáveis que

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\pi} \cos(\theta) e^{r^2} r d\theta dr = \frac{1}{2}\Big(-\operatorname{sen}\theta\Big)\Big|_0^{\pi} \Big(e^{r^2}\Big)\Big|_{r=0}^{r=\sqrt{2}} = 0 \ .$$

Questão 2: (2.5 pontos)

Calcule a integral de linha do campo vetorial

$$F(x,y) \ = \ \left(\frac{-y}{4x^2+y^2} + y, \frac{x}{4x^2+y^2}\right)$$

ao longo do quadrado C definido pelo sistema de equações $|x|+|y| = 4\sqrt{\pi}$, orientado no sentido anti-horário.

Solução:

Usaremos o Teorema de Green para resolver o problema. Para isto temos que isolar a origem da região a ser usada (pois F tem uma singularidade na origem). Definimos a curva auxiliar γ dada pela elipse $4x^2+y^2 = 1$ orientada no sentido horário. Seja D a limitada pelo quadrado e pela elipse. Logo, vale pelo Teorema de Green,

$$\int_{C\cup\gamma} F \cdot dr \ = \ \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy \ = \ -\iint_D dxdy \ = \ -(4\sqrt{2}\sqrt{\pi})^2 + \frac{\pi}{2} = -\frac{63\pi}{2} \, .$$

Assim temos que

$$\int_C F \cdot dr = -\frac{63\pi}{2} - \int_\gamma F \cdot dr = -\frac{63\pi}{2} + \int_{\gamma^-} F \cdot dr \, .$$

Parametrizando γ^- por $(x(\theta), y(\theta)) = (\frac{1}{2}\cos(\theta), \sin(\theta))$, onde $0 \leq \theta \leq 2\pi$, temos que:

$$\int_{\gamma^-} F \cdot dr \;=\; \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta = \frac{\pi}{2}\,.$$

Portanto

$$\int_C F \cdot dr = -\frac{63\pi}{2} + \int_{\gamma^-} F \cdot dr \;=\; -\frac{63\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = -31\pi\,.$$

Questão 3: (2.5 pontos)

Considere a superfície S obtida girando-se a curva

$$(x(t), z(t)) = (a\cos t, a \operatorname{sen} t), \quad -\frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{\pi}{6},$$

onde $a > 0$ é uma constante, em torno do eixo Oz. Calcule a área de S.

Solução:

Por hipóteses a curva gira em torno do eixo Oz, logo a parametrização da superfície S é dada por

$$\varphi(t,\theta) = \Big(a\cos t\, \cos\theta,\; a\cos t \operatorname{sen}\theta,\; a \operatorname{sen} t\Big), \quad -\frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{\pi}{6},\; 0 \leq \theta \leq 2\pi\,.$$

Assim o vetor normal e a sua norma são dados por

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} \times \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = -a^2\cos t \begin{pmatrix} \cos t\cos\theta \\ \cos t \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial t} \times \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \right\| = a^2|\cos t|\,.$$

Lembrando que $\cos t \geq 0$ se $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, calculamos

$$\text{Área } S = \iint_S 1\, ds = \int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} a^2\cos t\, dt\, d\theta = 2\pi\, a^2\Big(\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} - \operatorname{sen}(-\frac{\pi}{3})\Big) = \pi\, a^2(1+\sqrt{3})\,.$$

Questão 4: (2.5 pontos)

Calcular

$$\iint_S F \cdot \eta\, ds,$$

onde S é a superfície definida por

$$S = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; y = 4 - x^2 - z^2, \quad \text{e} \quad y \geq 0\Big\},$$

η é o vetor unitário normal a S cuja segunda coordenada é sempre positiva, ds é o elemento de área e F é o campo de vetores dado por:

$$F = \Big(\operatorname{arctg}(-y+2) + \cos(z^4+1),\; x^2+3y,\; -z + \ln(\operatorname{sen}^2 x + 1) + e^{y^7+9}\Big)\,.$$

Solução:

Consideramos o disco S_1 centrado na origem e de raio 2 no plano $y = 0$, isto é S_1 é definido por:

$$S_1 = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ y = 0 \text{ e } (x, z) \in B\Big\}, \quad \text{onde} \quad B = \Big\{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + z^2 \leq 4\Big\}$$

com vetor normal unitário $\eta_1 = (0, -1, 0)$. Seja W o volume delimitado por S_1 e S. Assim segue pelo teorema de Gauss

$$\iint_S F \cdot \eta \, ds + \iint_{S_1} F \cdot \eta_1 \, ds, = \iiint_W \text{div} F \, dxdydz, \tag{1}$$

Observamos que $\text{div}F = 2$ e que W é uma região de tipo II, portanto

$$\begin{aligned}
\iiint_W \text{div}\vec{F} \, dxdydz &= 2 \iint_B \int_{y=0}^{y=4-x^2-z^2} \, dydxdz = 2 \iint_B (4 - x^2 - z^2) \, dxdz \\
&= 8 \, \text{Área} \, (B) - 2 \iint\limits_B (x^2 + z^2) \, dx \, dz \\
&= 8 \, \text{Área} \, B - 2 \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^3 dr \, d\theta = 16\pi \, ,
\end{aligned}$$

onde na última integral temos usado coordenadas polares.

Agora, calculamos a integral de superfície sobre S_1,

$$\iint_{S_1} F \cdot \eta_1 \, ds = \iint_B \begin{pmatrix} \cdot \\ x^2 \\ \cdot \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \, dxdz = -\iint_B x^2 \, dxdz = -\int_0^{2\pi} \int_0^2 r^3 \cos^2\theta \, dr \, d\theta = -4\pi.$$

onde usamos novamente coordenadas polares. Assim pela equação (1) e pelo cálculo das integrais anteriores obtemos que

$$\iint_S F \cdot \eta \, ds = 16\pi + 4\pi = 20\pi.$$

Duração da prova: duas horas

Regras:

- Não é permitida consulta a qualquer fonte e nem se ausentar da sala durante a prova
- Todo o material do aluno, com exceção de documento de identidade, lápis, caneta, régua, borracha deve ficar junto à mesa do professor
- Calculadoras, aparelhos celulares e similares devem ficar desligados na bolsa/mochila do aluno junto à mesa do professor
- O aluno deve apresentar o documento de identificação quando for assinar a folha de presença.
- A prova pode ser feita com lápis e/ou caneta.