Questão 1 (2.5 pontos)

Calcule $\iint_D \sqrt[3]{y^2 - 9x^2}\, dxdy$, onde D é o triângulo de vértices $(0,6)$, $(1,3)$ e $(0,0)$.
Sugestão: Utilize uma mudança de coordenadas adequada

Solução:

O domínio D é limitado simultaneamente pelas retas $y + 3x = 6$, $y - 3x = 0$ e $x = 0$. A integração de $\sqrt[3]{y^2 - 9x^2}$ tanto em relação a x quanto em relação a y parece ser complicada. Como $y^2 - 9x^2 = (y - 3x)(y + 3x)$, parece ser adequado usar a mudança de coordenadas linear $u = y - 3x$ e $v = y + 3x$. Derivando e calculando temos que $\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = 6$ e, portanto, $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{1}{6}$.

A parametrização $\varphi(u,v)$ é dada por $(x,y) = \varphi(u,v) = ((v-u)/6,\ (u+v)/2)$. Seu domínio é a região limitada pelas retas $v = 6$, $u = 0$ e $u = v$. Então,

$$\iint_D \sqrt[3]{y^2 - 9x^2}\, dxdy = \frac{1}{6}\int_0^6 \int_0^v u^{1/3} v^{1/3}\, dudv = \frac{1}{8}\int_0^6 v^{5/3}\, dv = \frac{3}{64} 6^{8/3} = \frac{3^{11/3}}{2^{10/3}}.$$

Questão 2 (2.5 pontos)

Seja a uma constante, f uma função de classe $\mathscr{C}^1$ definida em $\mathbb{R}$ e o campo vetorial F dado por $\mathbf{F}(x,y) = (f(y) + x^2 y,\ ax^3 + xy^3)$.

Sabendo que $\oint_{\partial D} \mathbf{F}.dr = \text{Área}(D)$ para toda região D limitada em $\mathbb{R}^2$ cuja fronteira ∂D é uma curva simples de classe $\mathscr{C}^1$, orientada no sentido anti-horário, determine a constante a e a função f, sabendo que $f(0) = 2$.

Solução:

$F(x,y)$ é de classe $\mathscr{C}^1$ e a região D tem as condições para aplicação do Teorema de Green. Então, aplicando-o, temos que

$$\text{Área}(D) = \oint_{\partial D} \mathbf{F}.dr = \iint_D 3ax^2 + y^3 - f'(y) - x^2\, dA.$$

Se $3ax^2 + y^3 - f'(y) - x^2 = 1$ em todo o $\mathbb{R}^2$, a igualdade acima será satisfeita para toda região D nas condições do enunciado. Então, temos que $(3a-1)x^2 = f'(y) - y^3 + 1$ para todo par $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e, portanto, $a = 1/3$ e $f'(y) = y^3 - 1$. Integrando temos que $f(y) = \frac{y^4}{4} - y + C$. Como $y(0) = 2$, temos que $f(y) = \frac{y^4}{4} - y + 2$.

Questão 3 (2.5 pontos)

Considere o campo vetorial

$$\mathbf{F}(x,y,z) = -\left(\frac{xy^2z}{5} + \frac{y}{2} + x^2\right)\mathbf{i} + \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2yz}{5} + \ln(4 + \cos y^2)\right)\mathbf{j} + \left(\frac{2}{5}x^2y^2 + e^{\cos(1+z^6)}\right)\mathbf{k}.$$

Seja C a curva correspondente à porção da interseção das superfícies dadas por $z = xy$ e $x^2+y^2 = 1$ e cujos pontos tem coordenada $y \geqslant 0$, orientada com coordenada x decrescente. Calcule $\int_C \mathbf{F}.dr$.

Solução:

O cálculo direto da integral de linha parece envolver integrações não triviais. Vamos aplicar o Teorema de Stokes, utilizando a superfície S que é a porção de $z = xy$ no interior do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com $y \geqslant 0$. A fronteira de S, denotada ∂S, é dada por $\partial S = C \cup \gamma$, sendo γ o segmento de reta pertencente ao eixo cartesiano OX, com $x \in [-1, 1]$ orientada de forma que x seja crescente. A orientação de S é tal que o seu vetor normal tem a coordenada z positiva. Aplicando o Teorema de Stokes temos que

$$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F}.dS = \int_C \mathbf{F}.dr + \int_\gamma \mathbf{F}.dr.$$

Temos que $\operatorname{rot} \mathbf{F} = (x^2y,\, -xy^2,\, 1)$. A parametrização natural em S é dada por $\varphi(u, v) = (u, v, uv)$, com $u^2 + v^2 \leqslant 1$ e $v \geqslant 0$. Então, $N = \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} \times \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} = (-v,\, -u,\, 1)$. Segue que $\operatorname{rot} \mathbf{F}(\varphi(u, v)).N = -u^2v^2 + u^2v^2 + 1 = 1$. Então, $\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F}.dS = \text{Área}(D)$, sendo D o domínio de φ. Portanto, $\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F}.dS = \pi/2$.

A curva γ pode ser parametrizada por $\sigma(t) = (t, 0, 0)$, com $t \in [-1, 1]$. Portanto, $\sigma'(t) = (1, 0, 0)$ e $\int_\gamma \mathbf{F}.dr = -\int_{-1}^{1} t^2 dt = -2/3$.

Obtemos, então, que $\displaystyle\int_C \mathbf{F}.dr = \frac{3\pi + 4}{6}$.

Questão 4 (2.5 pontos)

Calcule o fluxo do campo vetorial $\vec{F}(x, y, z) = (y^3 \operatorname{sen} z,\, x^3 \cos z,\, z^3)$ através da superfície definida por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, onde $1 \leqslant z \leqslant 2$, sendo que o vetor normal aponta para fora do cone.

Solução:

Parametrizando o tronco de cone, observa-se que o cálculo da integral que se apresenta não é imediato. Aplicaremos o Teorema de Gauss na região do $\mathbb{R}^3$ dada por

$$W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tais que } z \geqslant \sqrt{x^2 + y^2} \text{ e } z \in [1, 2]\right\}.$$

Temos que a fronteira orientada positivamente de W, denotada ∂W, é dada por $\partial W = S \cup S_1 \cup S_2$, sendo S a superfície definida no enunciado. S_1 é a porção do plano $z = 2$ com $x^2+y^2 \leqslant 4$ e normal unitária $(0, 0, 1)$. S_2 é a porção do plano $z = 1$ com $x^2+y^2 \leqslant 1$ e normal unitária $(0, 0, -1)$.

Aplicando o Teorema de Gauss temos que

$$\iiint_W \operatorname{div}\vec{F}\, dV = \iint_S \vec{F}.dS + \iint_{S_1} \vec{F}.dS + \iint_{S_2} \vec{F}.dS.$$

Em S_1 temos que $\vec{F}.\eta = 8$, sendo η a normal unitária. Então, $\iint_{S_1} \vec{F}.dS = 32\pi$.

Em S_2 temos que $\vec{F}.\eta = -1$, sendo η a normal unitária. Então, $\iint_{S_1} \vec{F}.dS = -\pi$.

Temos que $\operatorname{div}\vec{F} = 3z^2$. Utilizando coordenadas cilíndricas, isto é, a mudança de coordenadas dada por $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$ e $z = z$, que tem como jacobiano r, obtemos que

$$\iiint_W \operatorname{div}\vec{F}\, dV = \int_0^{2\pi} \int_1^2 \int_0^z 3z^2 r\, drdzd\theta = \frac{93\pi}{5}\cdot$$

Obtemos, então, que $\displaystyle\iint_S \vec{F}.dS = \frac{93\pi}{5} - 32\pi + \pi = -\frac{62\pi}{5}\cdot$