Instituto de Matemática - IM/UFRJ
Cálculo Diferencial e Integral III - MAC238
Gabarito prova final - Escola Politécnica / Escola de Química - 29/11/20

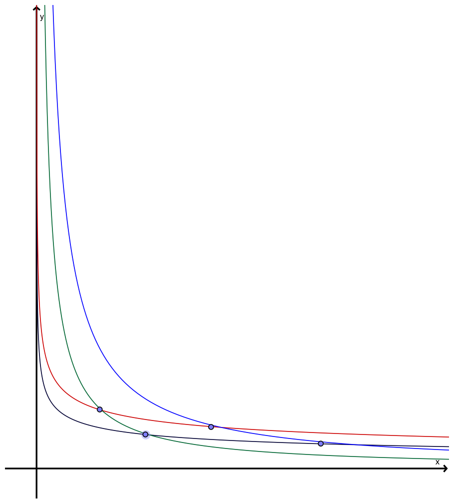
**Questão 1:** (2.5 pontos)

Encontre a área da região do primeiro quadrante limitada simultaneamente pelas curvas $xy = 4$, $xy = 8$, $xy^3 = 5$ e $xy^3 = 15$ usando uma única integral dupla.

Sugestão: aplique uma mudança de variáveis adequada.

**Solução:**

Um esboço da região pode ser visto na figura abaixo.



A ideia mais simples de mudança de variáveis é considerar $u = xy$ e $v = xy^3$. A matriz jacobiana da mudança de coordenadas inversa, isto é, da aplicação dada por $(u, v) = \Psi(x, y) = (xy, xy^3)$ é

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ y^3 & 3xy^2 \end{vmatrix} = 2xy^3 = 2v.$$

Sabemos que o determinante jacobiano da mudança de variáveis escolhida é o inverso multiplicativo do determinante jacobiano da mudança de variáveis inversa (consequência do Teorema da Função Inversa) e, portanto $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \left(\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)^{-1} = \dfrac{1}{2v}$. Com a mudança de variáveis escolhida, a região de integração é extremamente simples e é dada por $(u, v) \in [4, 8] \times [5, 15]$. Finalmente,

$$\text{Área} = \int_4^8 \int_5^{15} \frac{1}{2v}\, dvdu = 2(\ln 15 - \ln 5) = 2\ln 3$$

**Questão 2:** (2.5 pontos)

Seja o campo vetorial $\vec{F}(x,y) = \big(F_1(x,y), F_2(x,y)\big)$ de classe $\mathcal{C}^1$ definido em $U = \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\}$ e suponha que $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} = 4 + \dfrac{\partial F_1}{\partial y}$ em $U$. Sabendo, ainda, que $\int_\gamma \vec{F}.dr = 6\pi$, sendo $\gamma$ a circunferência de centro em $(0,0)$ e raio 1 orientada no sentido anti-horário, calcule $\int_C \vec{F}.dr$, onde $C$ é a elipse $25x^2 + 4y^2 = 100$, orientada no sentido anti-horário.

**Solução:**

Das condições de regularidade do campo vetorial $\vec{F}$ vemos que podemos aplicar o Teorema de Green em qualquer região que satisfaça as condições do teorema e que não contenha a origem, pois o campo não está definido em $(0,0)$. Vamos aplicar Green na região do $\mathbb{R}^2$, que denominaremos $D$, que contém os pontos no interior da elipse $25x^2 + 4y^2 = 100$ e fora da circunferência de centro em $(0,0)$ e raio 1. Pelo Teorema de Green, respeitando as orientações, temos que

$$\iint_D \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\, dA = \oint_C \vec{F}.dr - \oint_\gamma \vec{F}.dr.$$

Como $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} - \dfrac{\partial F_1}{\partial y} = 4$, a área do interior da elipse é $\pi.2.5 = 10\pi$, a área do interior do círculo é $\pi.1^2 = \pi$ obtemos que

$$\oint_C \vec{F}.dr = 6\pi + 4(10\pi - \pi) = 42\pi.$$

**Questão 3:** (2.5 pontos)

Seja $C$ a curva de interseção do cilindro circular $x^2 + y^2 = 4$ com o plano $z = 4$, orientada no sentido anti-horário quando vista de cima. Calcule $\oint_C F.dr$, onde $F$ é o campo vetorial definido por

$$F(x,y,z) = \big(yz + e^{x^2},\ 3x - xz + \ln(1+e^y),\ \ln(3x^2 + 3y^2 + 1 - z)\big).$$

Obs: Leve em conta na sua resolução o domínio do campo vetorial $F$ e, se julgar necessário, utilize o cilindro circular.

**Solução:**

Vemos que o último termo do campo vetorial $F$ não está definido em todo o $\mathbb{R}^3$. Em coordenadas cilíndricas está definido somente quando $z < 3r^2 + 1$. Em especial, se $z = 4$ não está definido no disco com $r \leqslant 1$. Assim, não podemos pensar em aplicar Stokes usando o disco dado por $z = 4$ e $r \leqslant 2$ como superfície. O cálculo direto da integral parece envolver integrações não usuais e deveremos tentar aplicar o Teorema de Stokes escolhendo superfície adequada.

O rotacional do campo $F$ é dado por

$$\operatorname{rot} F = \left( \frac{6y}{3x^2 + 3y^2 + 1 - z} + x, y - \frac{6x}{3x^2 + 3y^2 + 1 - z}, 3 - 2z \right).$$

Com a expressão para o rotacional obtida, vemos que este tem uma expressão mais simples sobre o cilindro $x^2 + y^2 = 4$. Seja $S_1$ a porção do cilindro $x^2 + y^2 = 4$ com $z \in [0, 4]$, orientada com normal apontando para o interior do cilindro. Seja $\gamma$ a projeção da curva $C$ no plano cartesiano $z = 0$ orientada no sentido anti-horário. Aplicando o Teorema de Stokes temos que

$$\iint_{S_1} \operatorname{rot} F.\eta \, dS = \oint_C F.dr - \oint_\gamma F.dr.$$

O cálculo direto da integral de linha ao longo da curva $\gamma$ tem a mesma dificuldade que o cálculo ao longo da curva $C$, no entanto, podemos aplicar o Teorema de Stokes para esta curva usando como superfície o plano $z = 0$ já que o campo e o rotacional são de classe $C^\infty$ para todos os pontos $(x, y, z)$ com $z < 1$, como já vimos. Seja $S_2$ a região do plano $z = 0$ limitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 4$, orientada com vetor normal unitário $(0, 0, 1)$. Temos que

$$\iint_{S_2} \operatorname{rot} F.\eta \, dS = \oint_\gamma F.dr$$

e, portanto,

$$\oint_C F.dr = \iint_{S_1} \operatorname{rot} F.\eta \, dS + \iint_{S_2} \operatorname{rot} F.\eta \, dS. \tag{1}$$

Obs: poderíamos ter chegado à mesma conclusão se tivéssemos escolhido a união das superfícies $S_1$ e $S_2$ para aplicar o Teorema de Stokes.

Podemos parametrizar $S_1$ por $\varphi(\theta, v) = (2\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta, v)$ com $\theta \in [0, 2\pi)$ e $v \in [0, 4]$ e, então,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v} \times \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = (0, 0, 1) \times (-2\operatorname{sen}\theta, 2\cos\theta, 0) = (-2cos\theta, -2\operatorname{sen}\theta, 0).$$

Este vetor está orientado para o interior de $S_1$, como se deseja. Daí segue que

$$\iint_{S_1} \operatorname{rot} F.\eta \, dS =$$

$$\int_0^4 \int_0^{2\pi} -\frac{24\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{13 - v} - 4\cos^2\theta + \frac{24\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{13 - v} - 4\operatorname{sen}^2\theta \, d\theta dv =$$

$$-\int_0^4 \int_0^{2\pi} 4 \, d\theta dv = -32\pi. \tag{2}$$

Obs: O vetor normal unitário deste cilindro é dado por $(-x/2, -y/2, 0)$ e, portanto, $\operatorname{rot} F.\eta = -x^2/2 - y^2/2 = -2$. Como a área de $S_1$ é o perímetro da projeção do cilindro no plano coordenado $xy$ multiplicado pela altura do cilindro, confirmamos o resultado obtido em (2).

Finalmente, como a normal unitária à superfície $S_2$ é dada por $(0, 0, 1)$, temos que $\operatorname{rot} F.\eta = 3$ ao longo de $S_2$ e, portanto, $\iint_{S_2} \operatorname{rot} F.\eta\, dS = 12\pi$. Aplicando este resultado e o obtido em (2) na equação (1) temos que $\oint_C F.dr = -32\pi + 12\pi = -20\pi$.

**Questão 4:** (2.5 pontos)

Calcule o fluxo do campo vetorial $F(x, y, z) = (x + \ln(y^2 z^4 + \pi),\ y + e^{x^2},\ x + z)$ através da superfície lateral do tetraedro limitado pelo plano $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$ e pelos planos coordenados, sendo $a$, $b$ e $c$ constantes positivas. Oriente esta superfície de forma que os vetores normais apontem para o interior do tetraedro.

Obs: considere que a superfície lateral deste tetraedro é constituída das suas faces, com exceção da face contida no plano cartesiano $xy$ (que é a base deste tetraedro).

**Solução:**

Inicialmente, temos que o campo $F$ está definido em todo o $\mathbb{R}^3$ e é de classe $C^\infty$. Para evitar calcular três integrais de superfície vetoriais com integrações possivelmente complicadas, vamos aplicar o Teorema de Gauss. A superfície (fronteira) completa do tetraedro inclui as três faces laterias pedidas e, também a base. Denominando $S_l$ a superfície lateral do tetraedro, orientada com vetores normais apontando para dentro do tetraedro, $S_b$ a base do tetraedro, orientada com vetores normais apontando para dentro do tetraedro e $\Omega$ o tetraedro propriamente dito, temos, usando o Teorema da Divergência (Gauss) a seguinte expressão

$$\iiint_\Omega \operatorname{div}(F)\, dV = \iint_{\partial\Omega} F.\eta\, dS = -\iint_{S_l} F.\eta\, dS - \iint_{S_b} F.\eta\, dS. \tag{3}$$

É imediato obter que $\operatorname{div} F = 3$ e, portanto, $\displaystyle\iiint_\Omega \operatorname{div}(F)\, dV = 3\mathrm{Vol}(\Omega)$. Da geometria analítica básica sabemos que o volume da pirâmide é dado por um terço da área da base multiplicada pela altura e, portanto, o volume deste tetraedro é $Vol = \dfrac{abc}{6}$. Temos, também que o vetor normal a $S_b$ é dado por $\eta = (0, 0, 1)$.

$$\iint_{S_b} F.\eta\, dS = \iint_{S_b} x + z\, dS = \iint_{S_b} x\, dS = \int_0^a \int_0^{b-bx/a} x\, dydx = \frac{a^2 b}{6}.$$

Utilizando (3) temos que $\displaystyle\iint_{S_l} F.\eta \, dS = -\frac{abc}{2} - \frac{a^2b}{6}$.