Questão 1: (2.5 pontos)

Calcule $\iiint_\Omega \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, sendo Ω a região em $\mathbb{R}^3$ limitada pelas superfícies S_1 e S_2. A superfície S_1 é dada pela equação cartesiana $z=\sqrt{x^2+y^2}$, com $0 \leqslant z \leqslant 1$. A superfície S_2 é dada pela equação cartesiana $x^2+y^2+(z-1)^2=1$, com $1 \leqslant z \leqslant 2$.

Solução:

A mudança de coordenadas esférica parece ser indicada para resolver esta integral. Seja, então, a mudança de coordenadas esférica dada por $\Psi(\rho,\theta,\varphi)=(\rho\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi, \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi)$. A superfície S_1 é caracterizada por $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$ (basta substitiur as coordenadas esféricas na euqação cartesiana de S_1). Substituindo as coordenadas esféricas na equação de S_2 obtemos que $\rho^2 = 2\rho\cos\varphi$. Considerando que $\rho \neq 0$ obtemos que $\rho = 2\cos\varphi$. Os limites de integração serão, então, dados por $\theta \in [0,2\pi]$, $\varphi \in [0,\pi/4]$ e $\rho \in [0, 2\cos\varphi]$. Como o jacobiano das coordenadas esféricas é dado por $\rho^2\,\mathrm{sen}\,\varphi$ temos que

$$\iiint_\Omega \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\cos\varphi} \rho^3\,\mathrm{sen}\,\varphi d\rho d\varphi d\theta =$$
$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4} 4\cos^4\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi d\varphi d\theta = 2\pi.\frac{4}{5}.\frac{8-\sqrt{2}}{8} = \frac{\pi}{5}(8-\sqrt{2}).$$

Questão 2: (2.5 pontos)

Calcule a integral de linha $\int_{\partial\Omega} \overrightarrow{F}.dr$, onde $\overrightarrow{F}(x,y)=\left(\dfrac{y^3}{3x}, e^{y^2}\right)$ e $\partial\Omega$ é a fronteira da região $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. A região Ω é limitada simultaneamente pelas curvas dadas por $3x^2=\pi y$, $3x^2 = 2\pi y$, $y^2=2x$ e $y^2=4x$. Oriente $\partial\Omega$ no sentido horário.

Solução:

Um esboço das quatro parábolas que limitam a região Ω nos leva a concluir que o cálculo direto da integral pedida envolverá o cálculo de 4 integrais de linha. A utilização do Teorema de Green parece ser uma alternativa adequada. Observamos que o campo vetorial não está definido ao longo do eixo cartesiano y mas, do esboço, obtemos que a região fechada Ω, que é a única região limitada simultaneamente pelas quatro curvas, se encontra no primeiro quadrante e não intercepta nenhum eixo cartesiano. Temos que $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} - \dfrac{\partial F_1}{\partial y} = -\dfrac{y^2}{x}$ e, daí, $\int_{\partial\Omega}\overrightarrow{F}.dr = \iint_\Omega \dfrac{y^2}{x}dxdy$, respeitando a orientação pedida. Analisando as curvas e a função a integrar, vemos que a mudança de coordenadas dada por $u=\dfrac{y^2}{x}$ e $v=\dfrac{x^2}{y}$ simplificaria bastante os cálculos. Temos, então , que $u^2v=y^3$ e $v^2u=x^3$. Portanto, $x=v^{2/3}u^{1/3}$ e $y=u^{2/3}v^{1/3}$. O cálculo do determinante jacobiano nos leva a

$$|J| = \left|\det\left(\frac{1}{3}\begin{bmatrix} u^{-2/3}v^{2/3} & 2u^{1/3}v^{-1/3} \\ 2u^{-1/3}v^{1/3} & u^{2/3}v^{-2/3}\end{bmatrix}\right)\right| = \frac{1}{3}$$

O domínio da mudança de coordenadas é dado por $u \in [2,4]$ e $v \in \left[\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right]$. Finalmente, usando o Teorema de Green (observando a orientação) e aplicando a mudança de coordenadas proposta temos que

$$\int_{\partial\Omega} \overrightarrow{F}.dr = -\iint_{\Omega} \frac{-y^2}{x} dxdy = \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \int_2^4 \frac{1}{3} ududv = \frac{2\pi}{3}.$$

Obs: O cálculo do jacobiano poderia ser feito sem explicitar a inversa da mudança de coordenadas proposta, o que facilita um pouco os cálculos. Para isto bastaria calcular $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$, obtendo que é igual a 3, e utilizar o Teorema da Função Inversa que assegura que $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \left(\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)^{-1}$.

Questão 3: (2.5 pontos)

Calcule a integral de linha $\int_C \overrightarrow{F}.dr$, onde C é a curva dada pela interseção do plano $z + 2y = 5$ com o parabolóide dado por $x^2 + (y-1)^2 = z$ e $\overrightarrow{F}(x,y,z)$ é o campo vetorial dado por

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = \left(y + \frac{z^3}{3} + e^{x^2},\ x,\ y^3 + z^6\right).$$

Oriente a curva de forma que a sua projeção no plano cartesiano xy esteja orientada no sentido horário.

Solução:

O cálculo explícito da integral de linha parece ser muito trabalhoso. Por outro lado, o campo vetorial F é de classe $\mathcal{C}^\infty$ em todo o $\mathbb{R}^3$ e satisfaz $\operatorname{rot} F(x,y,z) = (3y^2,\ z^2, 1-1) = (3y^2,\ z^2, 0)$

Podemos, então, aplicar o Teorema de Stokes e obter que $\int_C F.dr = \iint_S \operatorname{rot} F.dS$, sendo S a porção do plano $z + 2y = 5$ limitada pelo parabolóide $x^2 + (y-1)^2 = z$. A orientação para o plano deve ser tal que a terceira componente do vetor normal seja negativa, que é a orientação positiva do Teorema de Stokes, pois é dito no enunciado que a curva C é orientada de forma que a sua projeção no plano cartesiano xy é percorrida no sentido horário. Utilizaremos a parametrização natural para o plano que é dada por $\varphi(x,y) = (x\,, y,\, 5-2y)$. O domínio desta parametrização poderá ser determinado pela interseção do plano com o paraboloide. Substituindo a parametrização na equação do parabolóide obtemos que $x^2 + (y-1)^2 = 5 - 2y$, isto é, $x^2 + y^2 = 4$. O domínio da parametrização (que denotaremos D) será dado, portanto, por $x^2 + y^2 \leqslant 4$. Além disso, temos que $N := \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} \times \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = (0,2,1)$. Observemos que este vetor está orientado negativamente (terceira coordenada positiva). Obtemos, então que

$$\int_C F.dr = -\iint_D (3y^2, (5-2y)^2, 0).(0,2,1) dxdy = \iint_D 40y - 50 - 8y^2 dxdy.$$

Uma mudança de coordenadas polar nos leva

$$\int_0^2 \int_0^{2\pi} 40r \operatorname{sen}\theta - 50r - 8r^3 \operatorname{sen}^2\theta d\theta dr = \pi \int_0^2 -100r - 8r^3 dr = (-200 - 32)\pi = -232\pi$$

Obs: Poderia ser utilizada, também, uma parametrização da forma $\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, 5 - 2r\operatorname{sen}\theta)$ que permitiria que a integral no domínio fosse resolvida sem necessidade de mudança de coordenadas adicional.

Questão 4: (2.5 pontos)

Calcular $\iint_{\partial D} (\overrightarrow{F}.\overrightarrow{\eta})dS$, sendo $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (x^3 + xy^2)\overrightarrow{i} + (x^2y + y^3)\overrightarrow{j}$ e ∂D a fronteira da região D dada por $D = \{(x,y,z) \text{ tais que } x^2 + y^2 \leqslant a^2 \text{ e } 0 \leqslant z \leqslant h\}$, sendo a e h constantes positivas. Considere que o vetor normal $\overrightarrow{\eta}$ aponta para o interior da região D.

Solução:

Como a superfície a integrar já é a fronteira da região D, o Teorema de Gauss parece ser o mais indicado. Vemos que o campo vetorial F é de classe $\mathcal{C}^\infty$ em todo o $\mathbb{R}^3$ e satisfaz $\operatorname{div} F(x,y,z) = 4(x^2 + y^2)$

Como o Teorema da Divergência exige que o vetor normal à fronteira aponte para fora da região e foi pedida a integral na fronteira apontando para dentro da região, isto implica que $\iint_{\partial D} (\overrightarrow{F}.\overrightarrow{\eta})dS = -\iiint_D \operatorname{div} \overrightarrow{F} dV = -4 \iiint_D x^2 + y^2 dV$.

Uma mudança de coordenadas cilíndricas resolverá facilmente a integral tripla. Sabemos que esta mudança é dada por $\varphi(r,\theta,z) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z)$, sendo que o jacobiano é r. Temos que $\theta \in [0,2\pi]$, $z \in [0,h]$ e $r \in [0,a]$. Segue que $\iint_{\partial D} (\overrightarrow{F}.\overrightarrow{\eta})dS = -4 \iiint_D x^2 + y^2 dV = -4 \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^h r^3 dz dr d\theta = -2\pi a^4 h$.

Obs: A superfície $\partial\Omega$ é constituída pelo cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ com $0 \leqslant z \leqslant h$ e pela porção dos planos $z = 0$ e $z = h$ no interior do cilindro. O cálculo direto da integral de superfície em $\partial\Omega$ exigiria o cálculo da integral em cada uma destas superfícies.

Obs: Todas as curvas e regiões auxiliares utilizadas na resolução das questões deverão ser claramente identificadas, incluindo as orientações adotadas.