Questão 1: (2.5 pontos)

Calcule o volume do sólido W dado por

$$W = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{tais que} \quad z \leqslant 12 - (x^2+y^2), \quad z \geqslant \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{e} \quad z \leqslant 4 + x^2 + y^2 \right\}$$

Solução:

Sejam as superfícies S_1, S_2 e S_3 cujas equações são dadas, respectivamente, por $z = 12-(x^2+y^2)$, $z = \sqrt{x^2+y^2}$ e $z = 4 + x^2 + y^2$. Notemos que S_2 e S_3 não se interceptam pois se houvesse interseção esta deveria satisfazer $z = 4 + z^2$ que é uma equação de segundo grau sem solução real. Por outro lado, a interseção de S_1 e S_2 satisfaz $z^2+z-12 = 0$, que tem como raízes $z = -4$ e $z = 3$. A situação $z = -4$ não é aceitável pois a superfície S_2 só tem pontos com $z \geqslant 0$. Então temos que a interseção de S_1 e S_2 corresponde à circunferência dada por $x^2+y^2 = 9$ com $z = 3$. Isto implica que as duas primeiras desigualdades só poderão ser satisfeitas se $x^2+y^2 \leqslant 9$. Um procedimento análogo mostra que a interseção de S_1 e S_3 corresponde à circunferência dada por $x^2+y^2 = 4$ com $z = 8$. Isto implica que $x^2+y^2 \leqslant 4$ se, e somente se, $4+x^2+y^2 \leq 12-(x^2+y^2)$. Aplicando estas conclusões e utilizando coordenadas cilíndricas obtemos que

$$Volume = \iint_W 1 dV = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_r^{4+r^2} r dz dr d\theta + \int_0^{2\pi}\int_2^3\int_r^{12-r^2} r dz dr d\theta =$$
$$2\pi \int_0^2 4r + r^3 - r^2 dr + 2\pi\int_2^3 12r - r^3 - r^2 dr = \frac{67\pi}{2}$$

Obs: A expressão acima pode ser facilmente obtida se fizermos o gráfico da seção das três superfícies em $y = 0$, por exemplo, pois todas são superfícies de revolução.

Questão 2: (2.5 pontos)

Calcule $\oint_C \left(\frac{y^2}{2} + \ln(1+x^6), 2xy + \operatorname{sen}(5+4y^2)\right) . dr$, onde C é a fronteira da região do $\mathbb{R}^2$ limitada por $y = x$, $y = -x$ e $x^2+y^2 = 4$, com $y \geqslant 0$. A curva C está orientada no sentido horário.

Solução:

O cálculo direto envolve três integrais de linha de funções que, aparentemente, não são simples. O campo que está sendo integrado é de classe $\mathcal{C}^\infty$ definido em $\mathbb{R}^2$. Temos que $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = y$. Aplicando o Teorema de Green, observando que a orientação pedida tem sentido oposto à orientação padrão deste teorema, obtemos que

$$\oint_C \left(\frac{y^2}{2} + \ln(1+x^6), 2xy + \operatorname{sen}(5+4y^2)\right) . dr = -\iint_D y dA,$$

sendo D a região cuja fronteira é C. Utilizando coordenadas cilíndricas obtemos que

$$\iint_D y dA = \int_{\pi/4}^{3\pi/4}\int_0^2 r^2 \operatorname{sen}\theta dr d\theta = \frac{8\sqrt{2}}{3}.$$

Portanto, o resultado desejado é $-\frac{8\sqrt{2}}{3}$.

Questão 3: (2.5 pontos)

Calcule a integral de linha do campo

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(3 + yz^2\right)\mathbf{i} + (4 - x)\,\mathbf{j} + \left(5 + z^4\, \mathrm{e}^{\arctan z}\right)\mathbf{k}.$$

ao longo da curva C dada pela interseção das superfícies

$$\Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{tais que} \quad 3(x^2+y^2+z^2) = 2\sqrt{3}\,x \quad \text{e} \quad z \geqslant 0\Big\} \quad \text{e}$$
$$\big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{tais que} \quad x^2+y^2 = 1\big\}.$$

Considere que a curva esteja orientada no sentido anti-horário quando projetada no plano coordenado xy.

Solução:

O cálculo direto envolve uma integral de linha de campo vetorial que, aparentemente, não é simples. Iremos, então, aplicar o teorema de Stokes. O campo vetorial $\mathbf{F}$ é de classe $\mathcal{C}^\infty$ e está definido em todo o $\mathbb{R}^3$, com $\operatorname{rot}\mathbf{F} = (0, 2yz, -1-z^2)$. A curva C é a interseção de uma semi-esfera com um cilindro e não é uma curva fechada. Portanto, se quisermos aplicar o Teorema de Stokes para encontrar a integral de linha deveremos escolher uma superfície adequada e incluir uma nova curva γ conveniente de forma que a fronteira da superfície seja a união de C e γ. Escolheremos a superfície S como sendo a porção do cilindro $x^2+y^2=1$ limitada inferiormente pelo plano $z=0$ e superiormente pela curva C. A curva γ será a projeção ortogonal no plano cartesiano xy da curva C. Aplicando Stokes obtemos

$$\iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F}.dS = \int_C \mathbf{F}.dr + \int_\gamma \mathbf{F}.dr,$$

sendo que S e γ serão orientadas de forma positiva a partir da orientação de C.

Os pontos terminais das curvas C e γ satisfazem $3(x^2+y^2+z^2) = 2\sqrt{3}\,x$, $x^2+y^2=1$ e $z=0$. Portanto, $x = \sqrt{3}/2$ e, consequentemente, $y = 1/2$ ou $y = -1/2$. Portanto, o ponto inicial e final de C são, respectivamente, $(\sqrt{3}/2, -1/2, 0)$ e $(\sqrt{3}/2, 1/2, 0)$.

Uma parametrização para a superfície S é dada por $\varphi(\theta, z) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, z)$ com $\theta \in [-\pi/6, \pi/6]$ e $z \in \left[0, \left(2\sqrt{3}/3\cos\theta - 1\right)^{1/2}\right]$. Estes limites foram obtidos a partir dos pontos terminais de C e da interseção da esfera com o cilindro. Derivando obtemos que $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta} \times \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$. A orientação da superfície S compatível com a orientação pedida para a curva C aponta para o eixo coordenado z, sentido inverso ao de $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta} \times \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}$. Temos, então, que

$$\begin{aligned}
\iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F}.dS = &- \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \int_0^{\left(2\sqrt{3}/3\cos\theta - 1\right)^{1/2}} 2z\operatorname{sen}^2\theta\, dz d\theta = \\
&- \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \operatorname{sen}^2\theta(2\sqrt{3}/3\cos\theta - 1)d\theta = \\
&- 2\sqrt{3}/9\operatorname{sen}^3\theta + \theta/2 - 1/4\operatorname{sen}2\theta\Big|_{-\pi/6}^{\pi/6} = \\
&- \frac{11\sqrt{3}}{36} + \frac{\pi}{6}.
\end{aligned}$$

A curva γ está orientada no sentido horário. Uma parametrização para a curva γ^- é dada por $\sigma(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$ com $\theta \in [-\pi/6, \pi/6]$. Então, temos

$$\begin{aligned}\int_\gamma \mathbf{F}.dr = &-\int_{-\pi/6}^{\pi/6} (3, 4-\cos\theta, 5).(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0)d\theta = \\ &\int_{-\pi/6}^{\pi/6} 3\operatorname{sen}\theta - 4\cos\theta + \cos^2\theta\, d\theta = \\ &-4 + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

Então, temos que

$$\int_C \mathbf{F}.dr = \iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F}.dS - \int_\gamma \mathbf{F}.dr = -\frac{11\sqrt{3}}{36} + \frac{\pi}{6} + 4 - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6} = -\frac{5\sqrt{3}}{9} + 4$$

Questão 4: (2.5 pontos)

Calcular o fluxo do campo $\overrightarrow{X} = (\ln(1+y^4), \cos^6 x, 3z^2 - 5)$ através do hemisfério

$$H = \left\{(x,y,z) \quad \text{tais que} \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ z \geqslant 0\right\}.$$

Considere que a orientação de H seja tal que a componente z do vetor normal seja positiva.

Solução:

O cálculo direto envolve uma integral de superfície de campo vetorial que, aparentemente, não é simples. Iremos, então, aplicar o Teorema de Gauss.

O campo vetorial $\overrightarrow{X}$ é de classe $\mathcal{C}^\infty$ e está definido em todo o $\mathbb{R}^3$, com div $\overrightarrow{X} = 6z$. O hemisfério pedido não é uma superfície fechada e, portanto, para aplicar o Teormea de Gauss deveremos fechá-la. Escolhemos, então, o disco $D = \{(x,y,z) \text{ tais que } x^2 + y^2 \leqslant a^2,\ z = 0\}$ orientado com vetor normal unitário igual a $(0,0,-1)$. A região W limitada por H e D é dada por $W = \{(x,y,z) \text{ tais que } x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2,\ z \geqslant 0\}$. Como as orientações para H e D são as adequadas para o Teorema de Gauss (vetor normal apontando para fora de W) podemos aplicá-lo e obter que

$$\iiint_W 6z dV = \iint_H \overrightarrow{X}.dS + \iint_D \overrightarrow{X}.dS.$$

Utilizando coordenadas esféricas temos que

$$\begin{aligned}\iiint_W 6z dV &= \int_0^{2\pi}\int_0^a\int_0^{\pi/2} (6\rho\cos\varphi)(\rho^2\operatorname{sen}\varphi)\, d\varphi d\rho d\theta = \\ &\int_0^{2\pi}\int_0^a 3\rho^3\, d\rho d\theta = \frac{3\pi a^4}{2}.\end{aligned}$$

Também temos que

$$\iint_D \overrightarrow{X}.dS = \iint_D \overrightarrow{X}.(0,0,-1)dS = \iint_D 5dS = 5\pi a^2.$$

Finalmente, obtemos que

$$\iint_H \overrightarrow{X}.dS = \iiint_W 6z dV - \iint_D \overrightarrow{X}.dS = \frac{3\pi a^4}{2} - 5\pi a^2.$$