Questão 1: (2.5 pontos)

Calcule o volume do sólido W dado por

$$W = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{tais que} \quad x^{2/3} + \frac{y^2}{2} \leqslant y \quad \text{com} \quad z \in [0, 1] \right\}$$

Solução:

Completando os quadrados na inequação $x^{2/3} + y^2/2 \leq y$, obtemos

$$x^{2/3} + \frac{1}{2}(y-1)^2 \leq \frac{1}{2}.$$

Façamos a mudança de variáveis $x = r^3 \cos^3\theta$ e $y = 1 + \sqrt{2} r \operatorname{sen}\theta$, com $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq r \leq 1/\sqrt{2}$. Então o correspondente jacobiano é:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} 3r^2\cos^3\theta & -3r^3\cos^2\theta \operatorname{sen}\theta & 0 \\ \sqrt{2}\operatorname{sen}\theta & \sqrt{2}r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\sqrt{2} r^3 \cos^2\theta.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \operatorname{vol}(W) &= \iiint_W dxdydz = \int_0^1 \int_0^{1/\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} 3\sqrt{2} r^3 \cos^2\theta \, d\theta dr dz \\ &= 3\sqrt{2} \left(\frac{r^4}{4} \right)\Bigg|_0^{1/\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \, d\theta = \frac{3\sqrt{2}\pi}{16}. \end{aligned}$$

Questão 2: (2.5 pontos)

Seja D a região do primeiro quadrante limitada pelas circunferências centradas na origem de raios 1 e 2. Considere o segmento C_1 do eixo coordenado y ligando os pontos $(0,1)$ e $(0,2)$ e seja C_2 a curva orientada simples tal que a fronteira de D seja $C_1 \cup C_2$ orientada no sentido anti-horário.

Calcule $\displaystyle\int_{C_2} F \cdot dr$, sendo $F(x,y) = (\arctan(x) + y^2, \, \mathrm{e}^y - x^2)$.

Solução:

Pelo Teorema de Green, temos

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy = \oint_{\partial D} F \cdot dr = \int_{C_1} F \cdot dr + \int_{C_2} F \cdot dr,$$

onde a curva $\partial D = C_1 \cup C_2$ está orientada no sentido anti-horário.

Portanto,

$$\int_{C_2} F \cdot dr = \iint_D (-2x - 2y) \, dxdy - \int_{C_1} F \cdot dr.$$

Vamos calcular a integral dupla acima usando coordenadas polares. Então,

$$\begin{aligned}
-2\iint_D (x+y)\,dxdy &= -2\int_1^2\int_0^{\pi/2} (r\cos\theta + r\,\mathrm{sen}\,\theta)r,drd\theta \\
&= -2\left(\int_1^2 r^2\,dr\right)\left(\int_0^{\pi/2}(\cos\theta + \mathrm{sen}\,\theta)\,d\theta\right) \\
&= -2\left(\frac{7}{3}\right)(2) = -\frac{28}{3}.
\end{aligned}$$

Vamos agora calcular a integral de linha sobre C_1. Consideremos a seguinte parametrização de C_1:

$$\sigma(\tau) = (0, 2-\tau), \quad 0 \le \tau \le 1.$$

Então, $\sigma'(\tau) = (0,-1)$ e

$$\int_{C_1} F\cdot dr = \int_0^1 F(\sigma(\tau))\cdot\sigma'(\tau)\,d\tau = -\int_0^1 e^{2-\tau}\,d\tau = e - e^2.$$

Portanto,

$$\int_{C_2} F\cdot dr = -\frac{28}{3} + e^2 - e.$$

Questão 3: (2.5 pontos)

Determine b e c para que o campo dado por

$$F(x,y,z) = (y^2 + 2czx,\ y(bx+cz),\ y^2 + cx^2)$$

seja um campo gradiente e, para essas constantes, calcule $\int_C F\cdot dr$, onde C é a curva parametrizada por

$$\sigma(t) = (t + \cos(\pi t),\, 2t + \mathrm{sen}(\pi t),\, t), \quad 0 \le t \le 1.$$

Solução:

Como o campo F é de classe C^2, é suficiente mostrar que $\mathrm{rot}\,F = (0,0,0)$. Calculando diretamente, obtemos

$$\mathrm{rot}\,F = (2y - cy,\ 0,\ by - 2y).$$

Logo, F é campo gradiente se, e somente se, $b = c = 2$, isto é,

$$F(x,y,z) = (y^2 + 4zx,\ 2yx + 2z,\ y^2 + 2x^2).$$

Podemos então, determinar uma função potencial correspondente integrando cada uma das coordenadas. Mais precisamente,

$$F = \nabla f \iff \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = y^2 + 4zx, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2yx + 2z, \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = y^2 + 2x^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f(x,y,z) = y^2x + 2zx^2 + A(y,z) \\ f(x,y,z) = y^2z + 2zy + B(x,z) \\ f(x,y,z) = y^2z + 2x^2z + C(x,y) \end{cases}$$

Identificando as funções, obtemos $f(x,y,z) = y^2x + y^2z + 2x^2z$ e, consequentemente, pelo Teorema Fundamental do Cálculo para Integrais de Linha temos que

$$\int_C F \cdot dr = f(\sigma(1)) - f(\sigma(0)) = f(0,2,1) - f(1.0,0) = 4.$$

Questão 4: (2.5 pontos)

Calcule o fluxo do campo $F(x,y,z) = (5x + 3yz,\, 4xyz,\, x^2 - 2xz^2 + 1)$ através da superfície dada por $S_1 \cup S_2$ sendo,

$$S_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{tais que} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 9, \quad \text{com} \quad z \geqslant 0\right\} \quad \text{e}$$
$$S_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{tais que} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad \text{com} \quad z \leqslant 0\right\}.$$

Considere que as superfícies S_1 e S_2 são orientadas de forma que em ambas o vetor normal aponte para a origem.

Solução:

Considere o sólido $W = W_1 \cup W_2$, onde

$$W_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 9,\ \ z \geq 0\right\},$$
$$W_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ \ z \leq 0\right\}.$$

Então a fronteira de W é a superfície $S_1 \cup S_2 \cup S_3$, onde

$$S_3 = \left\{(x,y,0)\,;\, 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\right\}.$$

Se considerarmos a fronteira de W orientada de tal forma que os vetores normais apontem para o exterior de W, temos, do Teorema de Gauss,

$$\iiint_W \operatorname{div} F\, dxdydz = \iint_{\partial W} (F \cdot n) dS = \iint_{S_1 \cup S_2} (F \cdot n) dS + \iint_{S_3} (F \cdot n) dS.$$

Como $\operatorname{div} F = 5 + 4xz - 4xz = 5$, temos

$$\iiint_W \operatorname{div} F\, dxdydz = 5\,\mathrm{vol}(W) = 5\left(\frac{2}{3}\pi 3^3 + \frac{2}{3}\pi 2^3\right) = \frac{350\pi}{3}.$$

Por outro lado, parametrizando S_3 explicitamente, temos

$$\Phi(x,y) = (x,y,0), \quad (x,y) \in D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\right\},$$

de modo que

$$\iint_{S_3} (F \cdot n) dS = \iint_D (5x, 0, x^2 + 1) \cdot (0,0,-1)\, dxdy = -\iint_D (x^2 + 1)\, dxdy.$$

Em coordenadas polares, temos

$$-\iint_D (x^2 + 1)\, dxdy = -\int_2^3 \int_0^{2\pi} (r^2 \cos^2\theta + 1) r\, drd\theta = -\left(\frac{65}{4} + 5\right)\pi$$

Assim,

$$\iint_{S_1 \cup S_2} (F \cdot n)dS = \frac{350\pi}{3} + \left(\frac{65}{4} + 5\right)\pi.$$

Como a orientação escolhida na aplicação do Teorema de Gauss é contrária à pedida no enunciado da questão, o fluxo solicitado é:

$$\text{Fluxo através de } S_1 \cup S_2 = -\left(\frac{350}{3} + \frac{65}{4} + 5\right)\pi = -\frac{1655}{12}.$$