INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Gabarito da Prova Final Unificada de Cálculo III

1ª Questão: *Calcule a integral*

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} (x^2+y^2+z^2)^2 \, dzdydx.$$

Solução: Usando coordenadas esféricas, temos

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \operatorname{sen}\phi \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \\ z = \rho\cos\phi \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)}\right| = \rho^2 \operatorname{sen}\phi.$$

O domínio de integração é a parte interior da esfera de raio unitário centrada na origem contida no primeiro octante. Logo, em coordenadas esféricas, a integral é:

$$\int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \rho^4 \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho d\phi d\theta = \left(\int_0^1 \rho^6 \, d\rho\right)\left(\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\phi \, d\phi\right)\left(\int_0^{\pi/2} d\theta\right) = \frac{\pi}{14}.$$

2ª Questão: *Calcule*

$$\oint_C \frac{x^2-y^2}{2}\, dx + \frac{x^2+2y}{2}\, dy,$$

onde C é a fronteira da região $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq 4x^2+y^2 \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$, orientada no sentido anti-horário.

Solução: Pelo Teorema de Green, temos

$$\oint_C \frac{x^2-y^2}{2}\, dx + \frac{x^2+2y}{2}\, dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy$$

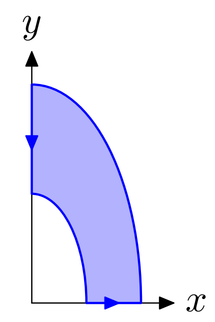
onde

$$F_1(x,y) = \frac{x^2-y^2}{2} \quad \text{e} \quad F_2(x,y) = \frac{x^2+2y}{2}.$$

Portanto,

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = x + y.$$

Observe que D é a região do primeiro quadrante compreendida entre as elipses $4x^2+y^2 = 1$ e $4x^2+y^2 = 4$ (veja a figura).



Assim, considerando a mudança de variáveis $\Phi : (r, \theta) \to (x, y)$, onde

$$x = \frac{1}{2} r \cos\theta, \quad y = r \operatorname{sen}\theta,$$

temos

$$\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \right| = \frac{r}{2}.$$

Como esta mudança de variáveis transforma univocamente a região $\Omega = [1,2] \times [0, \pi/2]$ em D, temos

$$\iint_D (x+y)\, dxdy = \int_1^2 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} r \cos\theta + r \operatorname{sen}\theta \right) \frac{r}{2}\, dr d\theta = \frac{7}{4}.$$

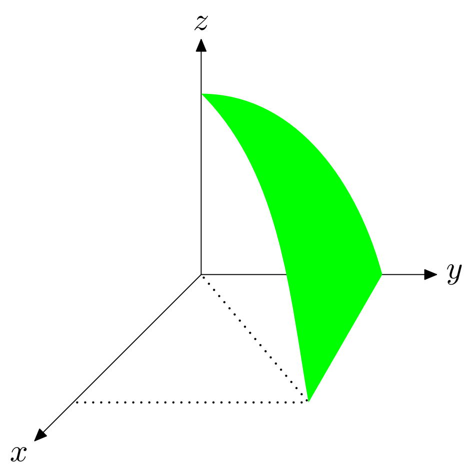
3ª Questão:

Calcule a área da superfície de equação $z = 1 - y^2$ compreendida entre os planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e o cilindro $z = 1 - x^2$.

Solução: Consideremos a parametrização $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\Phi(x,y) = (x, y, 1 - y^2),$$

onde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le y\}$.



Então

$$\frac{\partial \Phi}{dx} \times \frac{\partial \Phi}{dy} = (0, 2y, 1) \quad \Rightarrow \quad dS = \left\| \frac{\partial \Phi}{dx} \times \frac{\partial \Phi}{dy} \right\| dxdy = \sqrt{1 + 4y^2}\, dxdy.$$

Portanto,

$$\text{área de } S = \iint_S dS = \int_0^1 \left(\int_0^y \sqrt{1+4y^2}\, dx \right) dy = \frac{5\sqrt{5} - 1}{12}.$$

4ª Questão: *Calcule o fluxo* $\iint_S (\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n})\,dS$, *onde*

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = (z^2x,\ y^3/3+\cos(z),\ x^2z+y^2),$$

$S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2=2,\ z\geq 0\}$ *e* $\boldsymbol{n}$ *denota o vetor unitário apontando para cima (isto é, a terceira componente de* $\boldsymbol{n}$ *é positiva).*

Solução: Vamos considerar o conjunto

$$\Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\leq 2,\ z\geq 0\}.$$

Então a fronteira de Ω é $S\cup T$, onde S é a superfície dada e

$$T = \{(x,y,0)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\leq 2\}.$$

O campo $\boldsymbol{F}$ é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$. Logo, pelo Teorema de Gauss, temos

$$\iint_{S\cup T}(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n})\,dS = \iiint_\Omega \operatorname{div}\boldsymbol{F}\,dxdydz,$$

onde $\boldsymbol{n}$ denota os vetores unitários normais à fronteira $S\cup T$ apontando para fora de Ω. Assim,

$$\iint_S(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n})\,dS = \iiint_\Omega \operatorname{div}\boldsymbol{F}\,dxdydz - \iint_T(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n})\,dS. \tag{1}$$

Calculando o divergente do campo $\boldsymbol{F}$, temos: $\operatorname{div}\boldsymbol{F}(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$.
Vamos então calcular as duas integrais do lado direito da igualdade em (1). Usando coordenadas esféricas, temos $\operatorname{div}\boldsymbol{F}(x,y,z) = x^2+y^2+z^2=\rho^2$ e

$$dxdydz = \rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho d\theta d\phi.$$

Portanto

$$\iiint_\Omega \operatorname{div}\boldsymbol{F}\,dxdydz = \left(\int_0^{\sqrt{2}}\rho^4\,d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}\phi\,d\phi\right)\left(\int_0^{\pi/2}d\theta\right) = \frac{8\sqrt{2}\pi}{5}. \tag{2}$$

Em T temos $\boldsymbol{n}=(0,0,-1)$ e $\boldsymbol{F}(x,y,0)=(0,\ 1+y^3/3,\ y^2)$. Portanto,

$$\iint_T(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n})\,dS = -\iint_D y^2\,dxdy,$$

onde $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2\leq 2\}$. Usando coordenadas polares, temos

$$-\iint_D y^2\,dxdy = -\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} r^2\operatorname{sen}^2\theta\, r\,drd\theta = -\pi. \tag{3}$$

De (1), (2) e (3), obtemos o fluxo

$$\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \left(\frac{8\sqrt{2}}{5}+1\right)\pi.$$

5ªQuestão: *Use o Teorema de Stokes para calcular*

$$\oint_C y\,dx + z\,dy + x\,dz,$$

onde C é a curva obtida pela interseção do plano $x+y=2$ com a esfera $x^2+y^2+z^2 = 2(x+y)$. Indique a orientação escolhida.

Solução: Completando os quadrados na equação da esfera, obtemos

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 2.$$

Portanto, a esfera tem centro em $P_0 = (1,1,0)$ e raio $R = \sqrt{2}$. O plano $x+y=2$ passa por P_0. Logo, a curva C é uma circunferência com centro em P_0 e raio R.
Pelo Teorema de Stokes,

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_S (\operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n})\, dS,$$

onde S é qualquer superfície regular que tenha como bordo a curva C. Vamos então escolher como S a parte do plano $x+y=2$ limitada pela curva C. Neste caso, podemos escolher

$$\boldsymbol{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right).$$

Como $\operatorname{rot} \boldsymbol{F}(x,y,z) = (-1,-1,-1)$ para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, temos

$$\begin{aligned}\oint_C y\,dx + z\,dy + x\,dz &= \iint_S (-1,-1,-1)\cdot(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)\, dS \\ &= -\sqrt{2}(\text{área de } S) = -2\sqrt{2}\pi.\end{aligned}$$

Neste caso, estamos supondo que a curva está orientada no sentido anti-horário para quem a vê, por exemplo, do ponto $(2,2,0)$.