Questão 1: (2.5 pontos)

Seja S a superfície do cilindro $x^2+y^2=4$ com $0 \leq z \leq 4-(\frac{x^2}{4}+y^2)$, e contida no semi espaço $y \geq 0$. Calcule a área de S.

Solução:

Por definição, a área de $\mathcal{S}$ é dada pela integral de superfície escalar $\iint_{\mathcal{S}} 1ds$. Parametrizamos $\mathcal{S}$ como uma superfície de revolução por

$$\varphi(\theta,t) = (2\cos(\theta), 2\mathrm{sen}\,(\theta), t) \quad \text{com} \quad \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi, \\ 0 \leq t \leq 4 - \Big(\cos^2(\theta) + 4\,\mathrm{sen}^2(\theta)\Big). \end{cases}$$

Calculamos o elemento de superfície $\left\| \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \times \frac{\partial \phi}{\partial t}(\theta, t) \right\| = 2$.

Portanto, a área de $\mathcal{S}$ é dada por:

$$\text{área}\,(\mathcal{S}) = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{t=0}^{3\cos^2(\theta)} 2\,dtd\theta = 6\int_0^{\pi} \cos^2(\theta)\,d\theta = 3\Big(\theta + \frac{\mathrm{sen}\,(2\theta)}{2}\Big)\Big|_0^{\pi} = 3\pi\,.$$

Questão 2: (2.5 pontos)

Calcule a integral de linha de campo vetorial $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde C é a curva parametrizada por $\gamma(\theta) = (\cos(\theta), \mathrm{sen}(\theta), \theta^2)$, $\theta \in [0, 2\pi]$ e

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, e^z \right).$$

Dica: Usar o teorema de Stokes.

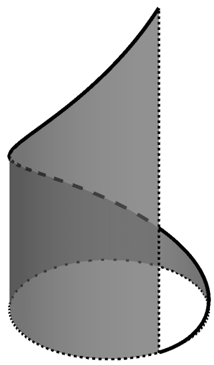
Solução:

O campo vetorial não é definido em $\{(0,0,z).z \in \mathbb{R}\}$. Mas, para $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\mathrm{rot}(F) = \left(0-0, 0-0, \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) = (0,0,0).$$

Pelo teorema de Stokes, tem-se que

$$0 = \iint_S \mathrm{rot}(F) \cdot dA = \int_{\partial S} F \cdot ds,$$



para qualquer superfície orientada S e tal que F é definido em S. Por exemplo, a superfície contido no cilindro $x^2+y^2=1$ (orientada para fora) e limitado pelas curvas γ, σ_1 e σ_2 definido por (ver a figura)

$$\sigma_1(t) := (\cos t, \sin t, 0), \quad t \in [0, 2\pi],$$
$$\sigma_2(t) := (1, 0, t), \quad t \in [0, 4\pi^2].$$

Como a orientação induzida de σ_1 e σ_2 é negativa,

$$\begin{aligned}\int_\gamma F \cdot ds &= \int_{\sigma_1} F \cdot ds + \int_{\sigma_2} F \cdot ds \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t, 1) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt + \int_0^{4\pi^2} (0, 1, e^t) \cdot (0,0,1) dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1 dt + \int_0^{4\pi^2} e^t dt = 2\pi + e^{4\pi^2} - 1.\end{aligned}$$

Questão 3: (2.5 pontos)

Calcule a integral de linha de campo vetorial $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ onde C é a curva definida como interseção, **no primeiro octante**, do cilindro $y^2 + (z-1)^2 = 1$ com o plano $x = y$, e o campo

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(e^{x^2} + yz, \mathrm{sen}(y^2) + xz, xy\right).$$

Escolhe e indique a orientação da curva C.

Solução:

A curva C é uma semi-elipse contida no plano $x = y$, cuja borda são os pontos $(0,0,0)$, $(0,0,2)$. Isso podia ser visto parametrizando C como $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$

$$\gamma(t) = (\cos(t), \cos(t), 1 + \mathrm{sen}(t));$$

a condição que a curva esteja no primeiro quadrante se traduz em $\cos(t) \geq 0$, i.e., $[a,b] = [-\pi/2, \pi/2]$: temos que $\gamma(-\pi/2) = (0,0,0)$, $\gamma(\pi/2) = (0,0,2)$. Vamos orientar C usando a orientação da parametrização γ, i.e., o ponto inicial é $(0,0,0)$ e o ponto final é $(0,0,2)$.

Calcular o integral diretamente é complicado, logo utilizamos o teorema de Stokes. Por isso precisamos fechar a curva usando o segmento $\tilde{C}$ que vai de $(0,0,2)$ á $(0,0,0)$.

Calculando o rotacional obtemos que $\mathrm{rot}(\vec{F}) = (0,0,0)$, portanto, por Stokes:

$$\int_C \vec{F} d\vec{r} + \int_{\tilde{C}} \vec{F} d\vec{r} = \iint_S \mathrm{rot}\vec{F} \cdot \vec{n} dS = 0.$$

Logo:

$$\int_C \vec{F} d\vec{r} = -\int_{\tilde{C}} \vec{F} d\vec{r}.$$

Alternativamente, como o campo não apresenta singularidades (é C^1 em todo $\mathbb{R}^3$), podia se observar que o campo é conservativo em todo $\mathbb{R}^3$, por isso o integral independe do caminho.

Podemos parametrizar $\tilde{C}^-$ (a curva $\tilde{C}$ com a orientação invertida)com a função $\tilde{\gamma}(t) = (0,0,2t), t \in [0,1]$.

Calculamos o integral:

$$-\int_{\tilde{C}} \vec{F} d\vec{r} = \int_0^1 (*, *, 0) \cdot (0,0,2) dt = 0.$$

Finalmente:

$$\int_C \vec{F} d\vec{r} = 0.$$

Questão 4: (2.5 pontos)

Sejam $S_1 = \{(x, y, z) \mid z^2 = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\}$ e $S_2 = \{(x, y, z) \mid z^2 = 1 - x^2 - y^2, \frac{\sqrt{2}}{2} \leq z \leq 1\}$; calcule

$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} dS,$$

onde $\vec{F}(x, y, z) = (xy^2 + e^z, yz^2 + e^x, zx^2 + e^y)$, a superfície S_1 está orientada pelo vetor normal com coordenada z negativa e S_2 pelo vetor normal com coordenada z positiva.

Solução:

Para calcular o fluxo vamos utilizar of Teorema de Gauss: a união das superficies S_1 e S_2 é uma superficie fechada, orientada positivamente com respeito ao dominio (expresso em cordenadas esfericas):

$$W = \{(\rho, \theta, \psi) \mid 0 \leq \rho \leq 1, \theta \in [0, 2\pi], 0 \leq \psi \leq \pi/4\}.$$

Pelo teorema de Gauss:

$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_W \operatorname{div}(\vec{F}) dxdydz.$$

Agora:

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = y^2 + z^2 + x^2$$

e, usando uma mudança de coordenadas esfericas

$$\iiint_W \operatorname{div}(\vec{F}) dxdydz = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^1 \rho^2 \cdot \rho^2 \operatorname{sen}(\psi) d\psi \, d\rho \, d\theta = 2\pi \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \frac{1}{5}.$$

Duração da prova: duas horas