Questão 1: (2.5 pontos)

Seja S a superfície parametrizada por $\varphi(u,v) = (u\cos v,\ u \operatorname{sen} v,\ v)$ com $0 \le u \le 2$ e $0 \le v \le 2\pi$, e seja f a função escalar definida por $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$. Calcule a integral

$$I = \iint_S f ds \ .$$

Solução:

Calculamos o vetor normal e o elemento de área

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} v \\ -\cos v \\ u \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \| = \sqrt{1+u^2}.$$

Portanto, deduzimos que

$$I = \int_0^2 \int_0^{2\pi} u\sqrt{1+u^2} dv du = \frac{2\pi}{3}(1+u^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{u=0}^{u=2} = \frac{2\pi}{3}\left(5^{\frac{3}{2}} - 1\right) \ .$$

Questão 2: (2.5 pontos)

Dado o campo vetorial

$$F(x,y,z) = \left(e^x \operatorname{sen} y + e^z \cos x,\ e^x \cos y + e^y \operatorname{sen} z,\ e^y \cos z + e^z \operatorname{sen} x\ \right),$$

determine a integral de linha de F ao longo da curva C parametrizada por $\gamma(t) = (t^3,\ \operatorname{sen}(\frac{t\pi}{2}),\ \cos(t\pi))$ com $0 \le t \le 1$.

Solução:

Observamos que

$$\operatorname{rot} F = \begin{pmatrix} e^y \cos z - e^y \cos z \\ e^z \cos x - e^z \cos x \\ e^x \cos y - e^x \cos y \end{pmatrix} = \vec{0} \ .$$

Portanto F é um campo conservativo. Procuramos por uma função potencial $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ satisfazendo

$$F = \nabla \phi \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = e^x \operatorname{sen} y + e^z \cos x \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = e^x \cos y + e^y \operatorname{sen} z \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} = e^y \cos z + e^z \operatorname{sen} x \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \phi(x,y,z) = e^x \operatorname{sen} y + e^z \operatorname{sen} x + C_1(y,z) \\ \phi(x,y,z) = e^x \operatorname{sen} y + e^y \operatorname{sen} z + C_2(x,z) \\ \phi(x,y,z) = e^y \operatorname{sen} z + e^z \operatorname{sen} x + C_3(x,y) \end{cases}$$

Escolhemos por exemplo $\phi(x,y,z) = e^x \operatorname{sen} y + e^z \operatorname{sen} x + e^y \operatorname{sen} z$. A curva C liga os pontos $A = (0,0,1)$ e $B = (1,1,-1)$. Portanto, segue da teoria de campos conservativos que

$$\int_C F \cdot dr = \int_A^B \nabla \phi \cdot dr = \phi(B) - \phi(A) = (e^{-1} - 1)\operatorname{sen}(1).$$

Questão 3: (2.5 pontos)
Seja γ a curva dada pela interseção do parabolóide $y = 2 - (x^2 + z^2)$ com o semi-cone $y = \sqrt{x^2 + z^2}$ orientada no sentido horário quando observada desde a origem das coordenadas. Calcular

$$J = \int_\gamma z e^x dx + \sqrt[3]{y^2 + 1} dy + (e^x - x + \cos(z^2)) dz.$$

Solução:

Olhamos para a interseção do parabolóide e do cone nas coordenadas cilíndricas ($x = r\cos\theta, y = y, z = r \operatorname{sen}\theta$) e deduzimos que $r^2 + r - 2 = 0$ e $y = r \geq 0$, ou seja ($r = 1, y = 1$). Portanto a curva γ é o círculo de centro $(0, 1, 0)$ e de raio $r = 1$ no plano $y = 1$.

Seja S o disco de centro $(0, 1, 0)$, de raio $r = 1$ no plano $y = 1$ com normal apontando na direção do y crescente. Então $\partial S = C$ é orientada positivamente e a normal unitária a S é dada por $\vec{n} = (0, 1, 0)$. Além disso, calculamos $\operatorname{rot} F = (0, 1, 0)$. Logo, vale pelo teorema de Stokes

$$J = \int_\gamma F \cdot dr = \iint_S \operatorname{rot} F \cdot \vec{n} ds = \iint_S ds = \text{área}\,(S) = \pi\ .$$

Questão 4: (2.5 pontos)
Seja S a porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ compreendida entre os planos $z = 0$ e $z = y$, com $y \geq 0$. Calcular

$$K = \iint\limits_S F \cdot \vec{\eta}\, ds,$$

onde $\vec{\eta}$ é a normal unitária a S cuja terceira coordenada é sempre positiva, ds é o elemento de área da superfície S e F é o campo de vetores dado por $F = \Big(\dfrac{\ln(1 + y^2)}{2 + \cos(z)},\ 1,\ 2z\Big)$.

Solução:

Primeiro, calculamos a divergência de F, $\operatorname{div} F(x, y, z) = 2$. Para aplicar o teorema de Gauss, consideramos a região W do espaço W, delimitada pelas superfícies S, $S_1 = \Big\{z = 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1\Big\}$ com normal apontando para baixo e $S_2 = \Big\{z = y,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\Big\}$ com normal apontando para cima. Portanto a fronteira de W, $\partial W = S \cup S_1 \cup S_2$ é orientada positivamente e vale pelo teorema da divergência

$$\iiint_W \operatorname{div} F\, dxdydz = \iint_{\partial W} F \cdot \vec{\eta}\, ds = \iint_S F \cdot \vec{\eta}\, ds + \iint_{S_1} F \cdot \vec{\eta}\, ds + \iint_{S_2} F \cdot \vec{\eta}\, ds\ . \qquad (1)$$

Como a região W é um oitavo da bola de raio 1, temos

$$\iiint_W \operatorname{div} F\, dxdydz = 2\,\text{volume}\,(W) = \frac{\pi}{3}\ . \qquad (2)$$

Por outro lado, calculamos os fluxos de F através S_1 e S_2. Parametrizamos S_1 explicitamente por $\varphi_1(x, y) = (x, y, 0)$, $(x, y) \in D_1 = \{x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0\}$ e verificamos que

$$\iint_{S_1} F \cdot \vec{\eta}\, ds = 0\,. \qquad (3)$$

Parametrizamos S_2 explicitamente por $\varphi_2(x,y) = (x,y,y)$, $(x,y) \in D_2 = \{x^2 + 2y^2 \leq 1,\ y \geq 0\}$. Verificamos que o vetor normal $\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = (0,-1,1)$ aponta bem para cima. Logo, deduzimos que

$$\iint_{S_2} F \cdot \vec{\eta}\, ds = \iint_{D_2} \begin{pmatrix} \frac{\ln(1+y^2)}{2+\cos y} \\ 1 \\ 2y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} dxdy = \iint_{D_2} \Big(2y-1\Big) dxdy \ ,$$

o que implica, usando coordenadas elípticas $(x = r\cos\theta, y = \frac{r}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}\theta)$

$$\iint_{S_2} F \cdot \vec{\eta}\, ds = \int_{r=0}^{1} \int_{\theta=0}^{\pi} (-1 + \sqrt{2} r \operatorname{sen}\theta) r d\theta dr = \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{\pi}{2} \tag{4}$$

Finalmente, concluimos juntando (1), (2), (3) e (4) que

$$\iint_{S} F \cdot \vec{\eta}\, ds = \frac{5\pi}{6} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \ .$$

Duração da prova: duas horas

Regras:

- Não é permitida consulta a qualquer fonte e nem se ausentar da sala durante a prova
- Todo o material do aluno, com exceção de documento de identidade, lápis, caneta, régua, borracha deve ficar junto à mesa do professor
- Calculadoras, aparelhos celulares e similares devem ficar desligados na bolsa/mochila do aluno junto à mesa do professor
- O aluno deve apresentar o documento de identificação quando for assinar a folha de presença.
- A prova pode ser feita com lápis e/ou caneta.