Questão 1 (2.5 pontos)

Seja C a curva contida no plano cartesiano xy cujos pontos satisfazem $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. Encontre a área da superfície de revolução gerada pela rotação da curva C em torno do eixo cartesiano OY.

Solução:

Seja S a superfície gerada. Temos que $A(S) = 2\pi \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} |x(t)|\, ds$, sendo ds o elemento de comprimento da curva, dado por $ds = \sqrt{y'(t)^2 + x'(t)^2}dt$.

Tomando $x(t) = a\cos^3 t$ e $y(t) = a \operatorname{sen}^3 t$, com $t \in [0, \pi/2]$ temos que $ds = 3a \operatorname{sen} t \cos t dt$. Consideramos, para evitar cálculos com módulo, apenas a porção de C com coordenadas $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$ e iremos multiplicar a área calculada por dois. Então, $A(S) = 12\pi a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^4 t \operatorname{sen} t dt = 12\pi a^2/5$.

Outra solução pode ser obtida usando a mesma integral mas tomando $x(t) = t$ e $y(t) = \left(a^{2/3} - t^{2/3}\right)^{3/2}$, com $t \in [0, a]$, usando a simetria da superfície para evitar usar módulo . Temos que $ds = \left(\dfrac{a}{t}\right)^{1/3}$ e, então $A(S) = 4\pi \int_0^a a^{1/3} t^{2/3} dt = 12\pi a^2/5$.

Uma outra forma de resolver é parametrizar a superfície de revolução tomando $\varphi(t, \theta) = (x(t)\cos\theta, y(t), x(t)\operatorname{sen}\theta)$, com $\theta \in [0, 2\pi]$ e $t \in [t_0, t_1]$. A área será dada por $A(S) = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1}\int_0^{2\pi} ||N(t,\theta)||\, d\theta dt$, sendo $N(t, \theta) = \dfrac{\partial\varphi}{\partial t} \times \dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta}$. Neste caso, calculando, obtemos que $\left\|\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} \times \dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right\| = |x(t)|(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{1/2}$.

Na expressão acima, se tomarmos $x(t) = a\cos^3 t$ e $y(t) = a\operatorname{sen}^3 t$, com $t \in [0, \pi/2]$ (usando, como anteriormente, a simetria para evitar cálculos com módulo), temos que $||N|| = 3a^2 \operatorname{sen} t \cos^4 t$.

Uma outra parametrização seria $x(t) = t$ e $y(t) = \left(a^{2/3} - t^{2/3}\right)^{3/2}$, com $t \in [0, a]$ e usando a simetria. Temos que $||N|| = a^{1/3} t^{2/3}$.

Finalmente, poderíamos parametrizar considerando $y(t) = t$ e $x(t) = (a^{2/3} - t^{2/3})^{3/2}$, com $t \in [0, a]$ e usando a simetria. Temos que $||N|| = a^{1/3} t^{2/3}$.

Questão 2 (2.5 pontos)

Seja $\vec{F}(x, y, z) = (y^2 + 2bxz,\ axy + byz,\ bx^2 + y^2)$.

(i) Determine as constantes a e b de modo que $\vec{F}$ seja um campo conservativo;

Solução:

O campo $\vec{F}$ é de classe C^∞ em todo o $\mathbb{R}^3$. Portanto, basta que $\operatorname{rot}\vec{F} = (0, 0, 0)$ para que o campo seja conservativo. Derivando o campo obtemos que $\operatorname{rot}\vec{F} = (2y - by,\ 0,\ ay - 2y)$. Concluímos que $a = b = 2$.

(ii) Usando os valores encontrados no item anterior, calcule $\int_C \vec{F}.d\vec{r}$ onde C é a curva parametrizada por

$$\sigma(t) = (t + \cos(\pi t),\ 2t + \operatorname{sen}(\pi t),\ t),\ 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Solução:
O ponto inicial da curva C é $(1,0,0)$ e o ponto final é $(0,2,1)$. O campo vetorial a ser considerado é $\vec{F}(x,y,z) = (y^2+4xz,\ 2xy+2yz,\ 2x^2+y^2)$. Integrando as funções coordenadas do campo encontramos uma função potencial dada por $f(x,y,z) = xy^2 + 2x^2z + y^2z$. A integral pedida é, então, $f(0,2,1) - f(1,0,0) = 4 - 0 = 4$.

Questão 3 (2.5 pontos)
Sejam $\vec{F}(x,y,z) = (y^2+z^2,\ 2x^2+z^2,\ x^2+y^2)$ e C a curva dada pela interseção das superfícies $x^2 + y^2 = 2az$ e $x + y = z$, onde a é uma constante positiva. Use a fórmula de Stokes para calcular $\int_C \vec{F}.dr$, sendo C orientada de tal forma que a orientação de sua projeção no plano xy é percorrida no sentido anti-horário.

Solução:
O campo $\vec{F}$ é de classe C^∞ definido em todo o $\mathbb{R}^3$. Seja S a porção do plano $x + y = z$ limitada pela sua interseção com o parabolóide elítico $x^2 + y^2 = 2az$, Orientando esta superfície de forma que a coordenada z do vetor normal seja positiva, obtemos que $\partial S = C$. Aplicando o Teorema de Stokes, temos que $\iint_S \operatorname{rot}\vec{F}.dS = \oint_C \vec{F}.dr$. Derivando o campo vetorial obtemos que $\operatorname{rot}\vec{F} = (2y - 2z,\ 2z - 2x,\ 4x - 2y)$.
A projeção no plano cartesiano xy da curva C é dada por $x^2 + y^2 = 2ax + 2ay$, isto é $(x-a)^2 + (y-a)^2 = 2a^2$. Então, é razoável parametrizar a superfície S por

$$\varphi(r,\theta) = (a + r\cos\theta,\ a + r\operatorname{sen}\theta, 2a + r\cos\theta + r\operatorname{sen}\theta),\ r \in [0, a\sqrt{2}],\ \theta \in [0, 2\pi].$$

Temos, então que

$$N = \frac{\partial\varphi}{\partial r} \times \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} =$$
$$(\cos\theta,\ \operatorname{sen}\theta,\ \cos\theta + \operatorname{sen}\theta)\times(-r\operatorname{sen}\theta,\ r\cos\theta,\ -r\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta) = (-r,\ -r,\ r)\,.$$

Este vetor normal tem a orientação correta (coordenada $z \geqslant 0$).
Então $\left(\operatorname{rot}(\vec{F}) \circ (\varphi(r,\theta))\right).N = 2ar + 6r^2\cos\theta - 4r^2\operatorname{sen}\theta$. Finalmente temos que

$$\int_C \vec{F}.dr = \iint_S \operatorname{rot}\vec{F}.dS = \int_0^{a\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} 2ar + 6r^2\cos\theta - 4r^2\operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta =$$
$$\int_0^{a\sqrt{2}} 4\pi ar\, dr = 4\pi a^3.$$

Obs: A parametrização para a superfície S, baseada em coordenadas polares, dada por $\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta,\ r\,\text{sen}\,\theta, r\cos\theta + r\,\text{sen}\,\theta)$, com $r \in [0, 2a\cos\theta + 2a\,\text{sen}\,\theta]$ e $\theta \in [-\pi/4, 3\pi/4]$ também poderia ser usada para calcular a integral de superfície em S.

Questão 4 (2.5 pontos)

Sejam $F(x,y,z) = (-x\,e^{z} + 3x,\ -y\,e^{z} + \arctan(x^2+z^2),\ 2\,e^{z})$ e S a porção da esfera dada por

$$S = \left\{(x,y,z)\ :\ x^2+y^2+z^2 = 1,\ z \geqslant 0\right\}.$$

Calcule $\displaystyle\iint_S F.\eta\, dS$, onde η é a normal unitária exterior à esfera.

Solução:

O campo $\vec{F}$ é de classe C^∞ definido em todo o $\mathbb{R}^3$. O cálculo direto da integral de superfície parece envolver integrações não triviais. Por outro lado, o divergente do campo vetorial F é dado por $\text{div}(F) = -e^z + 3 - e^z + 2\,e^z = 3$.

Iremos aplicar o Teorema da Divergência para simplificar os cálculos. Para isto, consideremos a região W do $\mathbb{R}^3$ limitada, simultaneamente, pela esfera $x^2+y^2+z^2=1$ e pelo plano $z=0$ com $z \geqslant 0$. Seja S_1 a porção do plano $z=0$ no interior da esfera $x^2+y^2+z^2=1$ orientada com vetor normal unitário η dado por $\eta = (0,0,-1)$.

Temos, então, que $\partial W = S \cup S_1$, o volume de W é $\dfrac{2}{3}\pi$ e a área de S_1 é π. Do Teorema da Divergência temos que $\iint_S F.\eta\, dS = \iiint_W \text{div}\, F\, dV - \iint_{S_1} F.\eta dS$.

Mas $\iiint_W \text{div}\, F\, dV = \iiint_W 3\, dV = 2\pi$ e, também, $\iint_{S_1} F.\eta dS = \iint_{S_1} -2\, dS = -2\pi$. Portanto, $\iint_S F.\eta\, dS = 4\pi$.