Questão 1: (2.5 pontos)

Calcule $\displaystyle\iint_S (F \cdot n)\, dS$, onde $F(x,y,z) = (2y, -z, x^2)$ e S é a superfície do cilindro $y^2 = 8x$ situada no primeiro octante e limitada pelos planos $y = 4$ e $z = 6$. Oriente a normal de forma que a sua coordenada x seja positiva.

Solução:

Uma parametrização para a superfície é dada por $\varphi(v,w) = \left(\frac{v^2}{8}, v, w\right)$, com $v \in [0,4]$ e $w \in [0,6]$. Temos que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} \times \frac{\partial \varphi}{\partial w} = \left(1, -\frac{v}{4}, 0\right).$$

Observe que este vetor normal tem o mesmo sentido que o proposto no enunciado. Então

$$\iint_S (F \cdot n)\, dS = \int_0^6 \int_0^4 F(\varphi(v,w)).\left(1, -\frac{v}{4}, 0\right) dvdw = \int_0^6 \int_0^4 2v + \frac{wv}{4} dvdw = 132$$

Questão 2: (2.5 pontos)

Seja o campo vetorial $\vec{F}(x,y,z) = (2xz + y^2, 2xy + 3y^2, e^z + x^2)$. Verifique se $\vec{F}$ é conservativo e calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ onde C é a curva dada pela interseção da superfície $z = 9 - x^2 - y^2$, com $z > -4$ com o plano $y = 2$ (oriente C de forma que a coordenada x seja crescente).

Solução:

O campo é de classe $\mathcal{C}^\infty$ definido em todo o $\mathbb{R}^3$. O rotacional é dado por $\operatorname{rot} \vec{F}(x,y,z) = (0 - 0, 2x - 2x, 2y - 2y) = (0,0,0)$ e, portanto, o campo é conservativo.

A interseção do parabolóide com o plano é a parábola dada por $z = 5 - x^2$ com $y = 2$. Os extremos da curva C ocorrem quando $z = -4$ e, portanto, $x = \pm 3$. Seguindo a orientação proposta no enunciado, temos que o ponto inicial A é dado por $A = (-3, 2, -4)$ e o ponto final B é dado por $B = (3, 2, -4)$.

Vamos utilizar a curva γ que corresponde ao segmento de reta que liga A até B, que é parametrizada por $\sigma(t) = (t, 2, -4)$, com $t \in [-3, 3]$. Então temos que $\sigma'(t) = (1, 0, 0)$ e, portanto,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{-3}^{3} -8t + 4\, dt = 24$$

OBS: A obtenção da função potencial envolve alguns cálculos adicionais. A função potencial relativa ao campo $\vec{F}$ é dada por $f(x,y,z) = x^2z + xy^2 + y^3 + e^z$ e a integral é dada pela diferença de potencial, isto é, $f(3,2,-4) - f(-3,2,-4) = 24$.

Questão 3: (2.5 pontos)

Seja C a curva de interseção da cônica $x^2 + y^2 - 2y + z^2 - 6z + 9 = 0$ com o plano $z = 3$, orientada no sentido anti-horário quando vista de cima. Calcule $\oint_C F.dr$, onde F é o campo vetorial definido por

$$F(x,y,z) = (3z + 5y, 7x + \arctan(z^2+1), 2x + \cos y^2).$$

Solução:

O campo $F(x,y,z)$ é de classe $\mathcal{C}^\infty$ definido em todo o $\mathbb{R}^3$. Completando quadrados na equação da cônica obtemos a esfera

$$x^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 1.$$

Assim C é uma circunferência com centro em $(0,1,3)$, raio 1, contida no plano $z = 3$. O cálculo direto da integral pedida parece envolver algumas integrações não imediatas e a aplicação do Teorema de Stokes pode simplificar os cálculos. Seja S a região do plano $z = 3$ contida no interior da curva C. O vetor normal unitário relativo à superfície S com a orientação adequada à orientação da curva C é dado por $(0,0,1)$. Portanto, ao aplicar o Teorema de Stokes, necessitaremos somente da terceira coordenada do rotacional, isto é, $7 - 5 = 2$. Então $\text{rot}\, F.\eta = (\_\_\_, \_\_\_, 2).(0,0,1) = 2$. Usando o teorema de Stokes:

$$\oint_C F.dr = \iint_S \text{rot} F.nds = 2 \text{ Área}(S) = 2\pi.$$

Questão 4: (2.5 pontos)

Calcule o fluxo do campo vetorial $\vec{F}(x,y,z) = (3+y+2z-x, z^8+\ln(x^6+1)-y, 2x-y-z)$ através da superfície S dada por $x^2 + y^2 + z = 1$ satisfazendo $x + z \geqslant 1$, isto é,

$$S = \left\{(x,y,z) \ : \ x^2 + y^2 + z = 1, \ x + z \geqslant 1\right\}.$$

Considere S orientada pela normal unitária que tem componente z não negativa.

Solução:

A projeção no plano cartesiano xy da interseção do plano $x+z=1$ com o parabolóide de equação $x^2+y^2+z=1$ é dada por $x^2+y^2+1-x=1$, isto é, $(x-1/2)^2+y^2=1/4$, que corresponde ao círculo horizontal de raio $1/2$ e centro em $(1/2,0,0)$.

O cálculo direto do fluxo parece envolver integrais trabalhosas e utilizaremos o Teorema de Gauss. Temos que $\operatorname{div}\vec{F}=-1-1-1=-3$ e, como S é uma superfície aberta, utilizaremos uma superfície auxiliar, que denominaremos S_1, para fechá-la. Seja S_1 a porção do plano $x+z=1$ limitada pelo parabolóide $x^2+y^2+z=1$ com vetor normal com coordenada z negativa. Pelo Teorema de Gauss temos que

$$\iint_S \vec{F}.\eta\,dS+\iint_{S_1}\vec{F}.\eta\,dS=\iiint_\Omega \operatorname{div}\vec{F}\,dV=-3\,\text{Volume}(\Omega),$$

sendo Ω a região do $\mathbb{R}^3$ limitada por $S\cup S_1$.

Uma parametrização natural para S_1 é dada por $\varphi(u,v)=(u,v,1-u)$. Daí, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\times\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}=(1,0,1)$ (orientação oposta à orientação de S_1). Então

$$\iint_{S_1}\vec{F}.\eta\,dS=-\iint_D(3+v+2-2u-u,\_\_,2u-v-1+u).(1,01)\,dudv=$$
$$-\iint_D 4\,dudv=-4\text{Área}(D),$$

sendo D o domínio da parametrização. Como usamos a parametrização natural temos que $\text{Área}(D)=\pi/4$.

O cálculo do volume de Ω necessita uma integral dupla. Temos que

$$\text{Volume}(\Omega)=\iint_D(1-x^2-y^2)-(1-x)\,dA=\iint_D x-x^2-y^2\,dA,$$

sendo D o círculo (em $\mathbb{R}^2$) dado por $(x-1/2)^2+y^2\leqslant 1/4$. Usando mudança de coordenadas polares com centro deslocado temos $\Psi(r,\theta)=(1/2+r\cos\theta,r\operatorname{sen}\theta)$, com $r\in[0,1/2]$ e $\theta\in[0,2\pi]$. O jacobiano desta mudança é igual a r e obtemos,

$$\text{Volume}(\Omega)=\iint_D x-x^2-y^2\,dA=$$
$$\int_0^{2\pi}\int_0^{1/2}\frac{r}{2}+r^2\cos\theta-r\left(\frac{1}{2}+r\cos\theta\right)^2-r^3\operatorname{sen}^2\theta\,drd\theta=$$
$$\int_0^{2\pi}\int_0^{1/2}\frac{r}{4}-r^3\,drd\theta=\frac{\pi}{16}-\frac{\pi}{32}=\frac{\pi}{32}.$$

Do Teorema de Gauss temos, então, que

$$\iint_S \vec{F}.\eta \, dS = -\iint_{S_1} \vec{F}.\eta \, dS + \iiint_\Omega \operatorname{div} \vec{F} \, dV = \pi - \frac{3\pi}{32} = \frac{29\pi}{32}$$