Questão 1: (2.5 pontos)

Calcule a integral de superfície escalar $\iint_S 5xydS$ sendo S a porção do cilindro $9x^2+4y^2=36$ contida no primeiro octante, limitada superiormente por $z=6(x^2+y^2)$ e inferiormente por $z=x^2+y^2$.

Solução:

Uma parametrização para o cilindro é dada por $\varphi(\theta,z)=(2\cos\theta,3\operatorname{sen}\theta,z)$, com $\theta\in[0,\pi/2]$ (primeiro octante). Substituindo a parametrização nas equações dos parabolóides temos que $z\in[4\cos^2\theta+9\operatorname{sen}^2\theta,\ 6(4\cos^2\theta+9\operatorname{sen}^2\theta)]$.

Com esta parametrização temos que $N:=\dfrac{\partial\phi}{\partial\theta}\times\dfrac{\partial\phi}{\partial z}=(3\cos\theta,2\operatorname{sen}\theta,0)$ e daí $||N||=(4+5\cos^2\theta)^{1/2}$. Finalmente temos

$$\iint_S 5xydS=\int_0^{\pi/2}\int_{4\cos^2\theta+9\operatorname{sen}^2\theta}^{6(4\cos^2\theta+9\operatorname{sen}^2\theta)}30\cos\theta\operatorname{sen}\theta(4+5\cos^2\theta)^{1/2}dzd\theta=$$
$$\int_0^{\pi/2}150\cos\theta\operatorname{sen}\theta(4\cos^2\theta+9\operatorname{sen}^2\theta)(4+5\cos^2\theta)^{1/2}d\theta=$$
$$150\int_0^{\pi/2}\cos\theta\operatorname{sen}\theta(13-(4+5\cos^2\theta)((4+5\cos^2\theta)^{1/2}d\theta=$$
$$-\frac{150\,.\,13}{15}\,(4+5\cos^2\theta)^{3/2}\Big|_0^{\pi/2}+\frac{150}{25}\,(4+5\cos^2\theta)^{5/2}\Big|_0^{\pi/2}=130\,.\,(27-8)-6\,.\,6(243-32)=1204$$

Questão 2: (2.5 pontos)

Seja $\overrightarrow{F}$ o campo vetorial em $\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$ dado por

$$\overrightarrow{F}(x,y,z)=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}(x,y,z)$$

e C a curva parametrizada por $\gamma:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}^3$, de classe $\mathcal{C}^1$ tal que $\gamma(0)\in S(a)$ e $\gamma(1)\in S(b)$, sendo $S(a)$ a esfera de raio a e centro na origem e $S(b)$ a esfera de raio b e centro na origem, com $0<a<b$. Suponha que a curva C não intercepta a origem. Calcule $\int_C\overrightarrow{F}.dr$.

Solução:

Observamos que o campo vetorial $\overrightarrow{F}$ não está definido na origem e é de classe $\mathcal{C}^\infty$ em todos os outros pontos. Além disso, rot $\overrightarrow{F}=-\dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}(2yz-2yz,2xz-2xz,2xy-2xy)=(0,0,0)$. Portanto, podemos aplicar a proposição de equivalência e obter que existe uma função potencial, isto é, uma função f que satisfaz $\overrightarrow{F}(x,y,z)=\nabla f(x,y,z)$. Integrando as funções coordenadas de $\overrightarrow{F}$ obtemos que $f(x,y,z)=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2+z^2)$. Se (x_a,y_a,z_a) é um ponto qualquer de $S(a)$ temos que $f(x_a,y_a,z_a)=\ln(a)$. Analogamente, se (x_b,y_b,z_b) é um ponto qualquer de $S(b)$ temos que $f(x_b,y_b,z_b)=\ln(b)$. Finalmente, $\int_\gamma\overrightarrow{F}.dr=f(x_b,y_b,z_b)-f(x_a,y_a,z_a)=\ln\dfrac{b}{a}$.

Questão 3: (2.5 pontos)

Seja C a curva orientada parametrizada por $\overrightarrow{r}(t)=(\cos(t),\ \operatorname{sen}(t),\ 8-\cos^2(t)-\operatorname{sen}(t))$, com $t\in[0,2\pi]$. Seja o campo vetorial $\overrightarrow{F}(x,y,z)=(z^2-y^2,\ -2xy^2,\ e^{\sqrt{z}}\cos(z))$. Calcule $\int_C\overrightarrow{F}.dr$.

Solução:

O cálculo direto da integral de linha parece envolver integrações não triviais. O campo $\overrightarrow{F}$ é de classe $\mathcal{C}^\infty$ se $z > 0$ e temos que $\text{rot}(\overrightarrow{F}) = (0, 2z, -2y^2 + 2y)$. Analisando a curva C, vemos que $z(t) > 6$ para todo $t \in [0, 2\pi]$ e que a curva está contida na superfície $z = 8 - x^2 - y$. Vamos utilizar esta superfície para aplicar o Teorema de Stokes.

Observamos que a projeção da curva C no plano coordenado xy tem o sentido anti-horário e, portanto, orientaremos a superfície de forma compatível com o Teorema de Stokes, isto é, com a terceira componente do vetor normal sendo positiva. Usando a parametrização natural, isto é, $\varphi(x, y) = (x, y, 8 - x^2 - y)$, temos que o domínio D desta parametrização é dado por $x^2 + y^2 \leqslant 1$. Temos, também, que $N := \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \times \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = (2x, 1, 1)$, que tem a orientação desejada. Então, $((\text{rot}\,\overrightarrow{F}) \circ \varphi).N = (0, 16 - 2x^2 - 2y, -2y^2 + 2y).(2x, 1, 1) = 16 - 2(x^2 + y^2)$. Aplicando o teorema de Stokes e coordenadas polares para a resolução da integral dupla obtemos

$$\int_C \overrightarrow{F}.dr = \iint_D 16 - 2(x^2 + y^2)dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 16r - 2r^3 dr d\theta = 16\pi - \pi = 15\pi.$$

Observação: A parametrização $\Psi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta, 8 - r^2 \cos^2 \theta - r \operatorname{sen} \theta)$, com $r \in [0, 1]$ e $\theta \in [0, 2\pi]$ também poderia ser utilizada. Neste caso teríamos que $((\text{rot}\,\overrightarrow{F}) \circ \Psi).N = (0, 16 - 2r^2 \cos^2 \theta, -2r^2 \operatorname{sen}^2 \theta + 2r \operatorname{sen} \theta).(2r^2 \cos \theta, r, r) = 16r - 2r^3 + 2r \operatorname{sen} \theta$. Daí teríamos

$$\int_C \overrightarrow{F}.dr = \int_0^{2\pi} \int_0^1 16r - 2r^3 dr d\theta = 16\pi - \pi = 15\pi.$$

Questão 4: (2.5 pontos)

Seja o Ω o volume em $\mathbb{R}^3$ dado por $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tais que } 4x^2 + y^2 \leqslant 16,\ -3 \leqslant z \leqslant 3\}$ e seja $\overrightarrow{F}$ o campo vetorial

$$\overrightarrow{F}(x, y, z) = \left(3x + \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2},\ -\frac{x + z}{x^2 + y^2 + z^2},\ \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}\right).$$

Calcule a integral de superfície vetorial $\displaystyle\iint_{\partial\Omega} \overrightarrow{F}.\overrightarrow{\eta}\, dS$, sendo $\partial\Omega$ a fronteira da região Ω e $\overrightarrow{\eta}$ a normal apontando para dentro de Ω.

Solução:

O cálculo direto das integrais de superfície parece envolver integrações não triviais ao longo da superfície lateral do cilindro $4x^2 + y^2 = 16$. Poderemos aplicar o Teorema da Divergência para encontrar este fluxo.

Temos diversas possibilidades para resolução. Uma delas é observar que o campo vetorial $\overrightarrow{F}$ pode ser escrito como $\overrightarrow{F}_a + \overrightarrow{F}_b$ sendo $\overrightarrow{F}_a = (3x, 0, 0)$ e $\overrightarrow{F}_b = 1/(x^2 + y^2 + z^2)(y, -x - z, y)$. Temos que $\text{div}\,\overrightarrow{F}_a = 3$ e $\text{div}\,\overrightarrow{F}_b = (2xy - 2xy - 2yz + 2yz)\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-2} = 0$. O campo $\overrightarrow{F}_a$ é de classe $\mathcal{C}^\infty$ em todo o $\mathbb{R}^3$. O campo $\overrightarrow{F}_b$ está definido em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ e $\text{div}\,\overrightarrow{F}_b = 0$. Por Gauss, $\displaystyle\iint_{\partial\Omega} \overrightarrow{F}_a.\overrightarrow{\eta}\, dS = -3 \text{ Volume}(\Omega) = -144\pi$. O fluxo do campo vetorial $\overrightarrow{F}_b$ pode ser calculado usando o Teorema da Divergência. Como a origem não pertence ao domínio do campo

$\overrightarrow{F}_b$, aplicaremos o Teorema da Divergência em uma região Ω_e obtida excluindo os pontos no interior de uma esfera de raio 1 e centro na origem do domínio original Ω. Aplicando o Teorema da Divergência obtemos

$$\iiint_{\Omega_e} \operatorname{div} \overrightarrow{F}_b dV = -\iint_{\partial\Omega} \overrightarrow{F}_b.\overrightarrow{\eta}.dS - \iint_{S_1} \overrightarrow{F}_b.\overrightarrow{\eta} dS, \tag{1}$$

sendo S_1 a esfera de centro na origem e raio 1 orientada com vetor normal apontando para o exterior da esfera. Os sinais adotados correspondem à orientação do Teorema da Divergência (vetor normal apontado para fora do volume).

- Uma parametrização para a esfera é dada por $\Psi(\theta,\varphi) = (\cos\theta \operatorname{sen}\varphi, \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, \cos\varphi)$, com $\theta \in [0,2\pi]$ e $\varphi \in [0,\pi]$. Então, $N := \dfrac{\partial\Psi}{\partial\theta} \times \dfrac{\partial\Psi}{\partial\varphi} = \operatorname{sen}\varphi(\cos\theta\operatorname{sen}\varphi, \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, \cos\varphi)$.

  Temos que

  $$\overrightarrow{F}_b(\Psi).N = \operatorname{sen}\varphi(\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, -\cos\theta\operatorname{sen}\varphi - \cos\varphi, \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi).$$
  $$(\cos\theta\operatorname{sen}\varphi, \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, \cos\varphi) = 0.$$

  Então, temos que $\iint_{S_1} \overrightarrow{F}_b.\overrightarrow{\eta} dS = 0$.

- Como $\operatorname{div} \overrightarrow{F}_b = 0$ temos que $\iiint_{\Omega_e} \operatorname{div} \overrightarrow{F}_b dV = 0$

- Substituindo na equação (1) obtemos que $\iint_{\partial\Omega} \overrightarrow{F}_b.\overrightarrow{\eta}.dS = 0$.

Finalmente, temos que $\iint_{\partial\Omega} \overrightarrow{F}.\overrightarrow{\eta}\, dS = \iint_{\partial\Omega} \overrightarrow{F}_a.\overrightarrow{\eta}\, dS + \iint_{\partial\Omega} \overrightarrow{F}_b.\overrightarrow{\eta}\, dS = -144\pi$.

Obs: Os cálculos seriam muito simplificados se observássemos que $\overrightarrow{F}_b = \dfrac{1}{2}\operatorname{rot}(-\ln(x^2+y^2+z^2, 0, \ln(x^2+y^2+z^2)$. Então, $\iint_{\partial\Omega} \overrightarrow{F}_b.\overrightarrow{\eta} dS = \dfrac{1}{2}\iint_{\partial\Omega} \operatorname{rot}(-\ln(x^2+y^2+z^2, 0, \ln(x^2+y^2+z^2).\eta\, dS = 0$, pelo Teorema de Stokes, pois a superfície $\partial\Omega$ é uma superfície fechada.

Obs: Se o campo vetorial $\overrightarrow{F}$ não fosse dividido como neste gabarito, os cálculos seriam um pouco mais trabalhosos. Usaríamos que $\iiint_{\Omega_e} \operatorname{div} \overrightarrow{F} dV = -\iint_{\partial\Omega} \overrightarrow{F}.\overrightarrow{\eta}.dS - \iint_{S_1} \overrightarrow{F}.\overrightarrow{\eta} dS$. Obteríamos que $\iiint_{\Omega_e} \operatorname{div} \overrightarrow{F} dV = 140\pi$ e $\iint_{S_1} \overrightarrow{F}.\overrightarrow{\eta} dS = 4\pi$, chegando ao resultado desejado.

Obs: Embora a aplicação direta do Teorema da Divergência na região Ω (desconsiderando completamente o fato que o campo vetorial não está definido na origem) forneça o mesmo resultado numérico que foi obtido nesta resolução, o seu emprego está conceitualmente incorreto, pois o campo não está definido na origem e nem mesmo é limitado em Ω. Um problema semelhante ao proposto nesta questão em que a aplicação direta não fornece o mesmo resultado ocorre quando, por exemplo, $\overrightarrow{F} = (x,y,z)/(x^2+y^2+z^2)^{3/2}$. Neste caso, o divergente se anula mas o fluxo em $\partial\Omega$ não se anula.

Obs: Todas as curvas e regiões auxiliares utilizadas na resolução das questões deverão ser claramente identificadas, incluindo as orientações adotadas.