Questão 1: (2.5 pontos)

Calcule a integral de superfície $\displaystyle\iint_S f(x,y,z)\,dS$ onde $f(x,y,z)$ é a função escalar definida por

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{1+4z^3}}$$

e S é a porção da superfície dada pela equação $z(x^2+y^2)=1$ que está contida no interior do cilindro elíptico $\dfrac{x^2}{4}+(y-2)^2=1$

Solução:
A superfície S é o gráfico da função

$$z(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}, \text{ com } (x,y)\in D = \left\{(x,y) \text{ tais que } \frac{x^2}{4}+(y-2)^2 \leqslant 1\right\}.$$

Logo, temos

$$\begin{aligned}\iint_S f(x,y,z)\;dS &= \iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}\,dxdy\\ &= \iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+\frac{4}{(x^2+y^2)^3}}\,dxdy,\end{aligned}$$

onde $z(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}$, para todo $(x,y)\in D$. Como

$$f(x,y,z(x,y)) = \frac{1}{\sqrt{1+4z(x,y)^3}} = \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{4}{(x^2+y^2)^3}}}, \quad \forall (x,y)\in D,$$

temos que $\displaystyle\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_D dxdy = \text{Área}(D) = 2\pi.$

Questão 2: (2.5 pontos)

Seja $F(x,y,z) = (y^2\cos x, 2y\,\mathrm{sen}\,x + \mathrm{e}^{2z}, 2y\,\mathrm{e}^{2z})$.

(a) Verifique se o campo vetorial $F(x,y,z)$ é conservativo. Caso seja, determine uma função potencial para $F(x,y,z)$.

Solução:
O rotacional de $F(x,y,z)$ é dado por

$$\mathrm{rot}(F)(x,y,z) = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right) =$$
$$(2\,\mathrm{e}^{2z} - 2\,\mathrm{e}^{2z}, 0-0, 2y\cos x - 2y\cos x) = (0,0,0)$$

Como o campo vetorial $F(x,y,z)$ está definido em todo o $\mathbb{R}^3$, é de classe $\mathcal{C}^1$ e $\mathrm{rot}(F)(x,y,z) = (0,0,0)$ temos, pelas propriedades de equivalência para campos vetoriais em $\mathbb{R}^3$, que F é um campo conservativo.

Seja $f(x,y,z)$ a função potencial, então, $\nabla f(x,y,z) = (y^2\cos x, 2y\,\text{sen}\,x + \mathrm{e}^{2z}, 2y\,\mathrm{e}^{2z})$. Integrando obtemos

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= y^2\,\text{sen}\,x + g_1(y,z)\\ f(x,y,z) &= y^2\,\text{sen}\,x + y\,\mathrm{e}^{2z} + g_2(x,z)\\ f(x,y,z) &= y\,\mathrm{e}^{2z} + g_3(x,y). \end{aligned}$$

Comparando as expressões acima obtemos que uma função potencial é dada por $f(x,y,z) = y^2\,\text{sen}\,x + y\,\mathrm{e}^{2z}$.

(b) Calcule $\displaystyle\int_C F.dr$ onde C é a interseção de $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$ com $x+y=2$. Oriente a curva C de forma que a coordenada x seja crescente.

Solução:
A superfícies correspondem a semi-esfera com $z \geqslant 0$ e um plano vertical e, portanto, a interseção será um semicírculo e o ponto inicial e o final tem coordenada z igual a zero. Calculando a interseção das superfícies dadas com o plano $z=0$ obtemos,

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 4-z^2\\ x+y=2\\ z=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=4\\ x+y=2\\ z=0 \end{cases} \Longrightarrow (x,y,z) \in \{(0,2,0),\ (2,0,0)\}$$

Então a curva se inicia em $(0,2,0)$ e termina em $(2,0,0)$ e, portanto $\displaystyle\int_C F.dr = f(2,0,0) - f(0,2,0) = -2$

Questão 3: (2.5 pontos)

Considere o campo vetorial $\mathbf{F}(x,y,z) = -\left(\dfrac{xy^2z}{5} + y^3 + \mathrm{e}^{\arctan(1+x^4)}\right)\mathbf{i} + \left(x^3 - \dfrac{x^2yz}{5}\right)\mathbf{j} + \dfrac{2}{5}x^2y^2\,\mathbf{k}$. Seja C a curva de interseção das superfícies $z = xy$ e $x^2+y^2=1$ orientada no sentido anti-horário quando projetada no plano xy. Calcule $\displaystyle\int_C F.dr$.

Solução:
Vamos aplicar o Teorema de Stokes. Observe que o campo $\mathbf{F}$ é de classe $\mathcal{C}^\infty$ definido em todo o $\mathbb{R}^3$. A superfície escolhida é o parabolóide hiperbólico dado por $z = xy$ restrito ao interior do cilindro $x^2+y^2=1$. Uma parametrização para a superfície é dada por $\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, r^2\cos\theta\,\text{sen}\,\theta)$, com $r\in[0,1]$ e $\theta\in[0,2\pi]$. Temos que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}\times\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = (\cos\theta, \text{sen}\,\theta, 2r\,\text{sen}\,\theta\cos\theta)\times(-r\,\text{sen}\,\theta, r\cos\theta, r^2\cos^2\theta - r^2\,\text{sen}^2\,\theta) =$$
$$(-r^2\,\text{sen}\,\theta\cos^2\theta - r^2\,\text{sen}^3\,\theta, -r^2\cos^3\theta - r^2\,\text{sen}^2\,\theta\cos\theta, r) = (-r^2\,\text{sen}\,\theta, -r^2\cos\theta, r).$$

A orientação do vetor normal acima tem terceira componente positiva que é a orientação adequada para o terorema de Stokes, já que a projeção da curva no plano cartesiano xy deve ser percorrida no sentido anti-horário. Temos, também, que

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(F)(x,y,z) &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{k} = \\ &\left(\frac{4}{5}x^2y+\frac{1}{5}x^2y\right)\mathbf{i}+\left(-\frac{1}{5}xy^2-\frac{4}{5}xy^2\right)\mathbf{j}+\left(3x^2-\frac{2}{5}xyz+\frac{2}{5}xyz+3y^2\right)\mathbf{k} = \\ &x^2y\,\mathbf{i}-xy^2\,\mathbf{j}+(3x^2+3y^2)\mathbf{k},\end{aligned}$$

e, daí, $\operatorname{rot}(\mathbf{F})(\varphi(r,\theta)) = r^3\cos^2\theta\,\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i}-r^3\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta\,\mathbf{j}+3r^2\,\mathbf{k}$.

Temos, então, que

$$\begin{aligned}&\operatorname{rot}(\mathbf{F})(\varphi(r,\theta)).\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\times\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) = \\ &\left(r^3\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta, -r^3\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta, 3r^2\right)\,.\,\left(-r^2\operatorname{sen}\theta, -r^2\cos\theta, r\right) = 3r^3.\end{aligned}$$

Finalmente, do Teorema de Stokes, que $\displaystyle\int_C F.dr = \iint_S \operatorname{rot}(\mathbf{F}).dS = \int_0^{2\pi}\int_0^1 3r^3 dr d\theta = \frac{3}{2}\pi.$

Obs: A parametrização natural também poderia ser utilizada e levaria, facilmente, a $\displaystyle\int_C F.dr = \iint_S \operatorname{rot}(\mathbf{F}).dS = \cdots = \iint_D 3x^2+3y^2 dxdy = \cdots = \frac{3}{2}\pi$, sendo D o círculo de raio 1 e centro na origem.

Questão 4: (2.5 pontos)

Calcular o fluxo do campo vetorial $F(x,y,z) = \dfrac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ através da superfície S dada por $S = \{x^2+y^2 = 1+z^4(1-z)^6,\ \text{com } 0\leqslant z\leqslant 1\}$, orientada de forma que o vetor normal em cada ponto da superfície aponte na direção do eixo cartesiano z.

Solução:

A superfície é uma supefície de revolução com eixo de revolução sendo o eixo cartesiano z e raio de revolução $(1+z^4(1-z)^6)^{1/2}$. O cálculo direto da integral de superfície provavelmente envolverá integrais delicadas. A aplicação do Teorema de Gauss parece indicada.

Temos que

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(F) =&\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}-\frac{3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}+\\ &\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}-\frac{3y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}+\\ &\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}-\frac{3z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}=0\end{aligned}$$

A superfície S não é fechada e, portanto, deveremos fechá-la com superfícies auxiliares de forma que o sólido gerado não contenha a origem, pois o campo F não está definido na origem.

Sejam, então, superfícies $T = \{x^2+y^2\leqslant 1 \text{ com } z=1\}$ e $H = \{x^2+y^2+z^2 = 1 \text{ com } z\geqslant 0\}$ e W a região limitada por S, T e H. A superfície T está orientada com vetor normal dado por

$(0,0,1)$ e a superfície H está orientada com vetor normal apontando para fora da origem. Com estas orientações e aplicando o Teorema de Gauss obtemos que

$$\iiint_W \operatorname{div}(F)dV = -\iint_S F.dS + \iint_T F.dS - \iint_H F.dS.$$

Calculando $\iint_T F.dS$: Parametrizando por $\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, 1)$ obtemos que $\dfrac{\partial\varphi}{\partial r} \times \dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta} = (0,0,r)$ com $r \in [0,1]$ e $\theta \in [0,2\pi]$. Então, temos

$$\iint_T F.dS = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{r}{(1+r^2)^{3/2}} = \int_0^{2\pi} -\frac{1}{(1+r^2)^{1/2}}\Big|_0^1 = 2\pi - \sqrt{2}\pi.$$

Calculando $\iint_H F.dS$: O vetor normal unitário apontando para fora da origem no ponto (x,y,z) de uma esfera unitária é dado por (x,y,z). Então $F.\eta = \dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} = 1$. Portanto $\iint_H F.dS = \iint_H dS = 2\pi$ (área da semi-esfera).

Como $\operatorname{div}(F) = 0$, aplicando o Teorema de Gauss com as orientações adequadas obtemos que

$$\iint_S F.dS = \iint_T F.dS - \iint_H F.dS = 2\pi - \sqrt{2}\pi - 2\pi = -\sqrt{2}\pi$$