Questão 1: (2.5 pontos)

Determine o fluxo do campo vetorial

$$F(x,y,z) = \left(y^2x + \frac{x}{x^2+y^2+z^2}, z^2y + \frac{y}{x^2+y^2+z^2}, x^2z + \frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right)$$

através da superfície do sólido W limitado pelas esferas de equações $x^2+y^2+z^2 = a^2$ e $x^2+y^2+z^2 = b^2$, com $0 < a < b$; orientadas com sentidos opostos e exteriores ao sólido W.

Solução:

Um cálculo simples mostra que

$$\text{div } F = (x^2+y^2+z^2) + \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$$

Aplicando o teorema da divergência temos:

$$\begin{aligned}\iint_{\partial W} F \cdot dS &= \iiint_W \text{div } F \, dxdydz \\ &= \iiint_W \left[(x^2+y^2+z^2) + \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\right] \, dxdydz\end{aligned}$$

Considerando coordenadas esféricas:

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta; \\ y = \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta; \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

onde $\theta \in [0, 2\pi]$, $\varphi \in [0, \pi]$ e $\rho \in [a, b]$ temos

$$\begin{aligned}\iint_{\partial W} F \cdot \eta \, dS &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_a^b \left(\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}\right) \rho^2 \operatorname{sen}\varphi \; d\rho d\varphi d\theta \\ &= 2\pi \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi \int_a^b \left(\rho^4 + 1\right) d\rho = 4\pi \left(\frac{\rho^5}{5} + \rho\right)\Big|_a^b \\ &= 4\pi \left(\frac{b^5 - a^5}{5} + b - a\right).\end{aligned}$$

Questão 2: (2.5 pontos)

Calcule a área da superfície S do semi-cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$ contida no interior do elipsóide $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$.

Solução:

Parametrizamos S explicitamente por $\varphi(x,y) = (x, y, \sqrt{x^2+y^2})$, $(x,y) \in D$. Para achar o domínio D, projetamos ortogonalmente a curva de interseção do cone e do elipsóide no plano Oxy.

$$\begin{cases} z = \sqrt{x^2+y^2} \\ \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{4} + z^2 = 1 \end{cases} \implies \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{4}y^2 = 1.$$

Logo, D é a região do plano contida na elipse de equação $\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{4}y^2 = 1$. Por outro lado, calculamos o elemento de área nesta parametrização:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1 \right) \quad \Longrightarrow \quad \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\| = \sqrt{2}.$$

Portanto, a área $\mathcal{A}$ de S é dada por

$$\mathcal{A} = \iint_D \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\| dxdy = \sqrt{2} \iint_D dxdy = \frac{4\pi}{\sqrt{15}} .$$

Questão 3: (2.5 pontos)

Seja C a curva de interseção do cilindro elíptico $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{2} = 1$ com a semi-esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, com $z \geq 0$, orientada no sentido anti-horário quando vista de cima. Calcule $\oint_C F \cdot dr$, onde F é o campo vetorial definido por

$$F(x,y,z) = \left(2zy, \;\; x, \;\; xy + \frac{4z}{x^2+2y^2} + z\ln(4+z^4) \right).$$

Solução:

Vamos aplicar o Teorema de Stokes. Observe que C não é uma curva plana e que o campo não está definido ao longo do eixo cartesiano z (pois o denominador de um dos termos do campo se anula nos pontos da forma $(0,0,z)$). Isto invalida a escolha de qualquer superfície que contenha o eixo cartesiano z. Seja S a superfície do cilindro situada entre o plano $z = 0$ e a curva C, e orientada com normal apontado para o interior do cilindro. Logo, se C_0 é a curva plana de equações $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{2} = 1$ e $z = 0$, orientada no sentido horário, a fronteira de S, $\partial S = C_0 \cup C$ é orientada positivamente e vale pelo teorema de Stokes:

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot dS = \oint_{C_0} F \cdot dr + \oint_C F \cdot dr.$$

Parametrizamos S por $\varphi(\theta, t) = (2\cos\theta, \sqrt{2}\,\text{sen}\,\theta, t)$, com $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq t \leq t(\theta)$. Para achar $t(\theta)$, olhamos para as equações da esfera nas cordenadas (θ, t):

$$2\cos^2\theta + 2 + t^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad t = t(\theta) := \sqrt{2}(1-\cos^2\theta)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\,|\,\text{sen}\,\theta|.$$

O vetor normal nesta parametrização, apontando para o interior, é dado por $\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} \times \dfrac{\partial \varphi}{\partial \theta} = (-\sqrt{2}\cos\theta, -2\,\text{sen}\,\theta, 0)$.

Por outro lado, calculamos o rotacional de F: $\operatorname{rot} F = (x - \dfrac{16yz}{(x^2+2y^2)^2}, y + \dfrac{8xz}{(x^2+2y^2)^2}, 1-2z)$.

Compondo com a pametrização

$$\operatorname{rot} F = (2\cos\theta - \sqrt{2}t\,\text{sen}\,\theta, \sqrt{2}\,\text{sen}\,\theta + t\cos\theta, 1-2t).$$

Daí

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot dS = \iint_D (2\cos\theta - \sqrt{2}t \operatorname{sen}\theta, \sqrt{2} \operatorname{sen}\theta + t\cos\theta, 1-2t) \,.\, (-\sqrt{2}\cos\theta, -2\operatorname{sen}\theta, 0)\, dtd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}|\operatorname{sen}\theta|} -2\sqrt{2}\, dtd\theta = -4\int_0^{2\pi} |\operatorname{sen}\theta| d\theta = -16.$$

Além disso, parametrizamos a curva C_0 por $\sigma(\theta) = (2\cos\theta, -\sqrt{2} \operatorname{sen}\theta, 0)$ para $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e obtemos

$$\oint_{C_0} F \cdot dr = -2\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta = -2\sqrt{2}\pi.$$

Finalmente, concluímos que

$$\oint_C F \cdot dr = -16 + 2\sqrt{2}\pi.$$

Observação: Sempre que alguma curva ou superfície auxiliar for utilizada para a resolução da questão, esta deve ser expressa claramente através do esboço e/ou pela descrição da superfície, como foi feito, por exemplo, nesta resolução.

Questão 4: (2.5 pontos)

Considere $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o campo de vetores definido por

$$F(x,y,z) = (yz + y + 2z + 2, xz + x + z + 1, xy + 2x + y + 2).$$

Calcule $\int_C F \cdot dr$, sendo C a curva obtida pela interseção do hemisfério superior da esfera de raio 1 e centro na origem, $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, com o plano $x + y + z = 1$, orientada do eixo y para o eixo x.

Solução:

F é campo gradiente em $\mathbb{R}^3$, pois para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $\operatorname{rot} F(x,y,z) = 0$. Calculando diretamente, obtém-se $F(x,y,z) = \nabla f(x,y,z)$, com

$$f(x,y,z) = xyz + xy + 2xz + yz + 2x + y + 2z.$$

A curva C é um arco de circunferência com extremidades em $P = (1,0,0)$ e $Q = (0,1,0)$. Portanto, de acordo com a orientação estabelecida, temos

$$\int_C F \cdot dr = f(P) - f(Q) = 2 - 1 = 1.$$