INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Gabarito da 2ª Prova Unificada de Cálculo III

1ªQuestão: *Considere a curva C obtida como interseção do plano $z = 1$ com a superfície dada por*

$$\frac{x^2}{3} + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1; \quad y \geq 0.$$

Considere C orientada no sentido crescente de x e calcule $\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$, onde $\boldsymbol{F}$ é o campo definido por

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = \left(2xy\cos(x^2) + ze^x,\ \operatorname{sen}(x^2) + \frac{2y}{y^2+1},\ e^x\right).$$

Solução: Observe que o campo $\boldsymbol{F}$ é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ e $\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ em $\mathbb{R}^3$. Logo $\boldsymbol{F}$ é um campo gradiente, isto é, existe f definida em $\mathbb{R}^3$ tal que $\boldsymbol{F} = \nabla f$. Calculemos f.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 2xy\cos(x^2) + ze^x \quad &\Rightarrow \quad f(x,y,z) &= y\operatorname{sen}(x^2) + ze^x + A(y,z);\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \operatorname{sen}(x^2) + \frac{2y}{y^2+1} \quad &\Rightarrow \quad f(x,y,z) &= y\operatorname{sen}(x^2) + \ln(y^2+1) + B(x,z);\\
\frac{\partial f}{\partial z} &= e^x \quad &\Rightarrow \quad f(x,y,z) &= ze^x + C(x,y).
\end{aligned}$$

Comparando o lado direito de cada uma das equações acima, obtemos

$$f(x,y,z) = y\operatorname{sen}(x^2) + ze^x + \ln(y^2+1).$$

A curva C liga os pontos $P_1 = (-3/2, 0, 1)$ e $P_2 = (3/2, 0, 1)$ (no sentido crescente de x, vai de P_1 a P_2). Portanto,

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = f(P_2) - f(P_1) = e^{3/2} - e^{-3/2} = 2\operatorname{senh}\left(\frac{3}{2}\right).$$

2ªQuestão: *Seja C o segmento de reta de $\mathbb{R}^3$ que liga os pontos $P_1 = (1, 0, 3)$ e $P_2 = (2, 0, 1)$.*

a) Parametrize a superfície S obtida como rotação de C em torno do eixo z.

b) Calcule $\iint_S (x + z)\, dS$.

Solução: A reta que contém o segmento ligando os pontos P_1 e P_2 pertence ao plano xz e tem como equação $z = 5 - 2x$. A superfície S gerada por este segmento é a lateral de um tronco de cone de revolução, com equação

$$z = 5 - 2\sqrt{x^2 + y^2} = 5 - 2r, \quad r \in [1, 2].$$

Assim, podemos parametrizá-la por

$$\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta,\ r\,\mathrm{sen}\,\theta,\ 5-2r), \quad 0 \le \theta < 2\pi,\ 1 \le r \le 2.$$

Usando esta parametrização de S, temos

$$\iint_S (x+z)\,dS = \iint_D (r\cos\theta + 5 - 2r)\left\|\frac{\partial\Phi}{\partial r} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right\| dr d\theta, \tag{1}$$

onde $D = \big\{(r,\theta) \mid \theta \in [0,2\pi),\ r \in [1,2]\big\}$.
Calculando o produto vetorial acima, temos

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = (2r\cos\theta,\ 2r\,\mathrm{sen}\,\theta,\ r) \quad \Rightarrow \quad \left\|\frac{\partial\Phi}{\partial r} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right\| = r\sqrt{5}$$

Substituindo em (1), temos

$$\begin{aligned}\iint_S (x+z)\,dS &= \iint_D (r\cos\theta + 5 - 2r) r\sqrt{5}\,dr d\theta \\ &= \sqrt{5}\int_0^{2\pi}\int_1^2 (r^2\cos\theta + 5r - 2r^2)\,dr d\theta = \frac{17\sqrt{5}\pi}{3}\end{aligned}$$

3ª Questão: *Considere a curva C obtida como interseção das superfícies definidas pelas equações $z = 1 - x^2$ e $z = x^2 + y^2$. Calcule $\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ indicando a orientação escolhida, onde*

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = \left((2-z)y,\ \mathrm{sen}(y^3),\ -\frac{xy}{2}\right).$$

Solução:
Seja S a parte da superfície $z = 1 - x^2$ limitada pela curva C e considere a seguinte parametrização de S:

$$\Phi(x,y) = (x,\ y,\ 1-x^2), \quad (x,y) \in D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + y^2 \le 1\big\}.$$

Observe que D é a projeção de S sobre o plano xy. Estamos considerando S com o vetor normal orientado para cima e C orientada no sentido anti-horário quando vista de cima.
Calculando, temos

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} \times \frac{\partial\Phi}{\partial y} = (2x, 0, 1), \quad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{F} = \left(-\frac{x}{2},\ -\frac{y}{2},\ z-2\right).$$

Assim, segue do Teorema de Stokes

$$\begin{aligned}\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_S \mathrm{rot}\,\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} &= \iint_D \left(-\frac{x}{2},\ -\frac{y}{2},\ z-2\right) \cdot (2x,0,1)\,dxdy \\ &= -\iint_D (1+2x^2)\,dxdy \qquad (1) \\ &= -\text{área de } D - 2\iint_D x^2\,dxdy\end{aligned}$$

Como D é a região no interior da elipse $2x^2 + y^2 = 1$, temos

$$\text{área de } D = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \tag{2}$$

Por outro lado, fazendo a mudança de variáveis $x = \frac{r}{\sqrt{2}} \cos\theta$ e $y = r \operatorname{sen}\theta$, obtemos

$$dxdy = \frac{r}{\sqrt{2}}\, drd\theta.$$

Logo

$$\begin{aligned} \iint_D x^2\, dxdy &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \frac{r^2}{2} \cos^2\theta \frac{r}{\sqrt{2}}\, dr \right) d\theta \\ &= \left(\int_0^1 \frac{r^3}{2\sqrt{2}}\, dr \right) \left(\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta \right) = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}. \end{aligned} \tag{3}$$

De (1), (2) e (3), obtemos

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = -\frac{\pi}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4\sqrt{2}} = -\frac{5\pi}{4\sqrt{2}}.$$

4ª Questão: *Considere o campo*

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = \left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + 3x,\ \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\ \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \right).$$

Calcule o fluxo de $\boldsymbol{F}$ *através das faces do cubo*

$$W = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -2 \le x \le 2,\ \ -2 \le y \le 2,\ \ -2 \le z \le 2\big\},$$

com vetores normais apontando para dentro.

Solução: O campo $\boldsymbol{F}$ é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. Como a origem do sistema está no interior do cubo W, vamos isolá-la, considerando a esfera S_1 de raio 1 centrada na origem para, então, usar o Teorema de Gauss na região R, que é interior ao cubo e exterior à esfera S_1.
Chamando de S a fronteira do cubo, temos do Teorema de Gauss

$$\iint_{S \cup S_1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_R \operatorname{div} \boldsymbol{F}\ dxdydz,$$

onde estamos considerando os vetores normais $d\boldsymbol{S}$ de $S \cup S_1$ apontando para fora da região R.
Como $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 3$, temos

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} + \iint_{S_1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = 3 \iiint_R dxdydz = 3(\text{volume de R}) = 192 - 4\pi. \tag{1}$$

Agora, vamos calcular $\iint_{S_1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_{S_1} (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n})\, dS$. Observe que estamos aqui considerando o vetor normal unitário $\boldsymbol{n}$ apontando para o interior da esfera S_1. Observe também que, em cada ponto $(x, y, z) \in S_1$, o vetor normal tem coordenadas $\boldsymbol{n} = (-x, -y, -z)$. Logo,

$$\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} = -3x^2 - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -3x^2 - 1.$$

Assim,

$$\iint_{S_1} (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n})\, dS = -\iint_{S_1} (3x^2 + 1)\, dS = -\iint_{S_1} 3x^2\, dS - 4\pi.$$

Em coordenadas polares temos

$$x = \cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi), \quad dS = \mathrm{sen}(\phi)\, d\theta d\phi, \quad \theta \in [0, 2\pi),\ \phi \in [0, \pi].$$

Logo,

$$\iint_{S_1} 3x^2\, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} 3\cos^2(\theta)\,\mathrm{sen}^3(\phi)\, d\theta d\phi = 4\pi$$

e consequentemente,

$$\iint_{S_1} (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n})\, dS = -8\pi. \tag{2}$$

De (1) e (2), concluímos que

$$\iint_{S} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = (192 - 4\pi) + 8\pi = 192 + 4\pi. \tag{3}$$

O fluxo em (3) foi obtido com os vetores normais de S apontando para fora, visto que foi nessa condição que usamos o teorema de Gauss. Como queremos calcular o fluxo com os vetores apontando para o interior do cubo, a resposta é: $-(192 + 4\pi)$.