Instituto de Matemática - IM/UFRJ
Cálculo Diferencial e Integral III - MAC238
Gabarito primeira prova - Escola Politécnica / Escola de Química - 12/05/2015

Questão 1: (2.5 pontos)

Seja $A \subset \mathbb{R}^2$ o conjunto limitado pela curva plana com parametrização dada por:

$$\sigma(\theta) = ((2 + \operatorname{sen}(4\theta))\cos(\theta), (2 + \operatorname{sen}(4\theta))\operatorname{sen}(\theta)), \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

(ver figura 1). Determine a área de A.

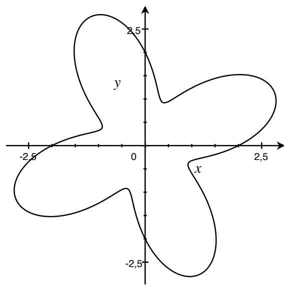

Figure 1: A curva.

Solução:

A aplicação de mudança de coordenadas polares em Euclideanas é dado por $\Phi : [0, \infty) \times [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2, (r, \theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Como

$$A = \Phi(\{(r, \theta) : r \leq 2 + \sin(4\theta)\}),$$

obtemos pela mudança de variáveis que

$$\begin{aligned}
\text{área}(A) &= \iint_A dxdy = \iint_{\{(r,\theta):r\leq 2+\sin(4\theta)\}} |\det D\Phi| dxdy \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2+\sin(4\theta)} r dr \right) d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (2 + \sin(4\theta))^2 d\theta \\
&= \frac{1}{2}\left(4\theta - \cos(4\theta)|_0^{2\pi}\right) + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2(4\theta) d\theta
\end{aligned}$$

Versão 1: $\sin^2(4\theta) = (1 - \cos(8\theta))/2$. Então, obtém-se a integral indefinida

$$\int \sin^2(4\theta) d\theta = \frac{1}{2}(\theta - \frac{1}{8}\sin(8\theta))$$

Versão 2: Pela integração em partes, obtém-se as integrais indefinidas

$$\begin{aligned}
\int \sin^2(4\theta) d\theta &= \sin(4\theta) \cdot \frac{-1}{4}\cos(4\theta) + \frac{1}{4}\int 4\cos^2(4\theta) d\theta \\
&= -\frac{1}{4}\sin(4\theta)\cos(4\theta) + \int 1 - \sin^2(4\theta) d\theta.
\end{aligned}$$

Daí, $\int \sin^2(4\theta) d\theta = \theta/2 - \sin(4\theta)\cos(4\theta)/8$ e

$$\text{área}(A) = 4\pi + \frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\sin(4\theta)\cos(4\theta)}{8} \Bigg|_0^{2\pi} \right) = 4\pi + \pi/2 = \frac{9\pi}{2}.$$

Questão 2: (2.5 pontos)
Calcule o volume do solido V contido no primeiro octante (i.e., $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$) e limitado pelas superfícies $z + \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ e $z - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 0$.

Solução:
A projeção da interseção das duas superfícies no plano xy é uma circunferência, de equação $x^2 + y^2 = 36/13$. O solido pode ser representado como um domínio de tipo 3:

$$W = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq z \leq 1 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}\},$$

onde

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 36/13, x \geq 0, y \geq 0\},$$

como tem a restrição ao primeiro octante.
Logo, podemos calcular o volume:

$$\int\int\int_W 1 \cdot dx\,dy\,dz = \int\int_D \int_{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}}^{1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}} 1dz\,dx\,dy = \int\int_D 1 - \frac{13}{36}(x^2 + y^2)\,dx\,dy.$$

Em D, podemos passar em coordenadas polares $x = \rho\cos(\theta), y = \rho\sin(\theta)$; $D = \{(\theta, \rho) \mid 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \rho \leq \frac{6\sqrt{13}}{13}\}$. Logo:

$$\int\int_D 1 - \frac{13}{36}(x^2 + y^2)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{6\sqrt{13}}{13}} \left(1 - \frac{13}{36}\rho^2\right)\rho\,d\rho\,d\theta$$
$$= 2\pi\left(\frac{\rho^2}{2} - \frac{13}{4 \cdot 36}\rho^4\right)\Bigg|_0^{\frac{6\sqrt{13}}{13}}.$$

Questão 3: (2.5 pontos)
Calcule a integral de linha de função escalar:

$$\int_C |y|\,ds,$$

ao longo da curva plana C com parametrização dada por:

$$\gamma(\theta) = (e^\theta\cos(\theta), e^\theta\,\mathrm{sen}(\theta)), \quad \theta \in [0, 3\pi].$$

Solução:
O vetor velocidade γ' é dado por

$$\gamma'(\theta) = \left(e^\theta(cos(\theta) - \mathrm{sen}\,(\theta)), e^\theta(\mathrm{sen}\,(\theta) + cos(\theta))\right).$$

Logo calculamos a sua norma:

$$\|\gamma'(\theta)\| = \left(e^{2\theta}(cos(\theta) - \mathrm{sen}\,(\theta))^2 + e^{2\theta}(\mathrm{sen}\,(\theta) + cos(\theta))^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}e^\theta\,.$$

Por definição da integral de linha de função escalar, temos

$$\begin{aligned}\int_C |y|ds &= \int_0^{3\pi} e^{\theta}|\text{sen}\,(\theta)|\|\gamma'(\theta)\|d\theta \\ &= \sqrt{2}\int_0^{\pi} e^{2\theta}\text{sen}\,(\theta)\,d\theta - \sqrt{2}\int_{\pi}^{2\pi} e^{2\theta}\text{sen}\,(\theta)\,d\theta + \sqrt{2}\int_{2\pi}^{3\pi} e^{2\theta}\text{sen}\,(\theta)\,d\theta\,.\end{aligned}$$

Para calcular uma primitiva de $F(\Theta) = \int^{\Theta} e^{2\theta}\text{sen}\,(\theta)\,d\theta$, integramos duas vezes por partes

$$\begin{aligned}F(\Theta) = \int^{\Theta} \text{sen}\,(\theta)\,d(\frac{1}{2}e^{2\theta}) &= \frac{1}{2}e^{2\Theta}\text{sen}\,(\Theta) - \frac{1}{2}\int^{\Theta} \cos(\theta)\,d(\frac{1}{2}e^{2\theta}) \\ &= \frac{1}{2}e^{2\Theta}\text{sen}\,(\Theta) - \frac{1}{4}e^{2\Theta}\cos(\Theta) - \frac{1}{4}F(\Theta)\,,\end{aligned}$$

o que nós dá $F(\Theta) = \frac{2}{5}e^{2\Theta}\text{sen}\,(\Theta) - \frac{1}{5}e^{2\Theta}\cos(\Theta)$.
Portanto, concluímos que

$$\int_C |y|ds = \sqrt{2}\left(F(\theta)\Big|_0^{\pi} - F(\theta)\Big|_{\pi}^{2\pi} + F(\theta)\Big|_{2\pi}^{3\pi}\right) = \frac{\sqrt{2}}{5}\left(1 + 2e^{2\pi} + 2e^{4\pi} + e^{6\pi}\right)\,.$$

Questão 4: (2.5 pontos)
Calcule a seguinte integral de linha de campo vetorial:

$$\int_C \left(\frac{3(y-1)}{(x-1)^2+(y-1)^2} + \frac{-5(y+1)}{(x+1)^2+(y+1)^2}\right)dx + \left(\frac{-3(x-1)}{(x-1)^2+(y-1)^2} + \frac{5(x+1)}{(x+1)^2+(y+1)^2}\right)dy$$

ao longo da curva $C = C_1 \cup C_2$, união das curvas definidas por:

- C_1, a curva $x^2+y^2=1$ percorrida no sentido horário,
- C_2, a a curva $x^2+y^2=9$ percorrida no sentido anti-horário.

Solução:
A gente vai dividir a integral em quatro integrais distintos:

1. $\int_{C_1} \frac{3(y-1)}{(x-1)^2+(y-1)^2}dx + \frac{-3(x-1)}{(x-1)^2+(y-1)^2}dy$,
2. $\int_{C_1} \frac{-5(y+1)}{(x+1)^2+(y+1)^2}dx + \frac{5(x+1)}{(x+1)^2+(y+1)^2}dy$,
3. $\int_{C_2} \frac{3(y-1)}{(x-1)^2+(y-1)^2}dx + \frac{-3(x-1)}{(x-1)^2+(y-1)^2}dy$,
4. $\int_{C_2} \frac{-5(y+1)}{(x+1)^2+(y+1)^2}dx + \frac{5(x+1)}{(x+1)^2+(y+1)^2}dy$.

Seja

$$\vec{F}(x,y) = -3\cdot\frac{-(y-1)}{(x-1)^2+(y-1)^2}\cdot\vec{\imath} - 3\cdot\frac{(x-1)}{(x-1)^2+(y-1)^2}\cdot\vec{\jmath},$$

podemos observar que esse campo é 3 vezes o trasladado do campo

$$\frac{-y}{x^2+y^2}\cdot\vec{\imath} + \frac{x}{x^2+y^2}\cdot\vec{\jmath}$$

no ponto $(1,1)$. Por isso:

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0.$$

O mesmo raciocínio vale pelo campo

$$\vec{G}(x,y) = 5 \cdot \frac{-(y+1)}{(x+1)^2+(y+1)^2} \cdot \vec{\imath} + 5 \cdot \frac{(x+1)}{(x+1)^2+(y+1)^2} \cdot \vec{\jmath}.$$

Observamos que a curva C_1 delimita um domínio D_1 que não contem singularidades nem de $\vec{F}$, nem de $\vec{G}$. Por isso podemos aplicar o Teorema de Green:

$$\int_{C_1} \frac{3(y-1)}{(x-1)^2+(y-1)^2} dx + \frac{-3(x-1)}{(x-1)^2+(y-1)^2} dy = \int_{D_1} 0 \, dx \, dy = 0,$$

e

$$\int_{C_1} \frac{-5(y+1)}{(x+1)^2+(y+1)^2} dx + \frac{5(x+1)}{(x+1)^2+(y+1)^2} dy = \int_{D_1} 0 \, dx \, dy = 0.$$

Temos agora que calcular:

$$\int_{C_2} \frac{3(y-1)}{(x-1)^2+(y-1)^2} dx + \frac{-3(x-1)}{(x-1)^2+(y-1)^2} dy.$$

Como a curva C^2 delimita um domínio D_2 que contem uma singularidade em $(1,1)$ temos que trabalhar um pouco para aplicar Green. Observamos que podemos aplicar Green no domínio $\tilde{D}_{2,F} = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 9, (x-1)^2+(y-1)^2 \geq 1\}$, cuja borda orientada positivamente é a união de C_2 percorrida em sentido anti-horário com curva auxiliaria $\tilde{C}_2$ dada por $(x-1)^2+(y-1)^2 = 1$ percorrida no sentido horário. Podemos aplicar Green:

$$\int_{C_2} \vec{F} d\vec{r} + \int_{\tilde{C}_2} \vec{F} d\vec{r} = \int_{\tilde{D}_{2,F}} 0 \, dx \, dy = 0,$$

logo

$$\int_{C_2} \vec{F} d\vec{r} = \int_{\tilde{C}_2^-} \vec{F} d\vec{r},$$

onde $\tilde{C}_2^-$ é a curva $(x-1)^2+(y-1)^2 = 1$ percorrida no sentido anti-horário, que podemos parametrizar por

$$\sigma(\theta) = (1+\cos(\theta), 1+\sin(\theta)), \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Por isso:

$$\int_{C_2} \vec{F} d\vec{r} = \int_{\tilde{C}_2^-} \vec{F} d\vec{r} = -3 \int_0^{2\pi} \sin(\theta)^2 + \cos(\theta)^2 \, d\theta = -6\pi.$$

Seguindo o mesmo raciocínio, usando o domínio $D_{2,G} = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 9, (x+1)^2+(y+1)^2 \geq 1\}$, e aplicando Green obtemos que:

$$\int_{C_2} \vec{G} d\vec{r} = 10\pi,$$

e que:

$$\int_C \left(\frac{3(y-1)}{(x-1)^2+(y-1)^2} + \frac{-5(y+1)}{(x+1)^2+(y+1)^2} \right) dx + \left(\frac{-3(x-1)}{(x-1)^2+(y-1)^2} + \frac{5(x+1)}{(x+1)^2+(y+1)^2} \right) dy$$
$$= 10\pi - 6\pi = 4\pi.$$