Questão 1: (2.5 pontos)

Calcular o valor da integral $\displaystyle\int_0^8 \int_{\frac{1}{2}y^{1/3}}^1 \sqrt{1-x^4}\, dx\, dy$.

Resposta. Como a função $x = \frac{1}{2}y^{1/3}$, $y \geq 0$, poderia ser escrita como $y = 8x^3$, o domínio da integração é

$$D = \left\{(x,y);\quad 0 \leq y \leq 8,\quad \frac{1}{2}y^{1/3} \leq x \leq 1\right\} = \left\{(x,y);\quad 0 \leq x \leq 1,\quad 0 \leq y \leq 8x^3\right\}.$$

Portanto

$$\int_0^8 \int_{\frac{1}{2}y^{1/3}}^1 \sqrt{1-x^4}\, dxdy = \int_0^1 \int_0^{8x^3} \sqrt{1-x^4}\, dydx = \int_0^1 8\,x^3\,\sqrt{1-x^4}\, dx = 8\,(1-x^4)^{3/2}\frac{2}{3}\frac{1}{(-4)}\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{4}{3}.$$

Questão 2: (2.5 pontos)

Encontre o valor da área do domínio plano situado no primeiro quadrante e limitado por

$$y = x,\quad 3\,x^2 + y^2 = 3,\quad x^2 + 3\,y^2 = 9.$$

Resposta: área Ω = área Δ_{0BC} - área Δ_{0AC} com $A = (\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2)$, $B = (3/2, 3/2)$ e $C = (0, \sqrt{3})$. Mudança de variáveis $x = r\cos\theta$, $y = \sqrt{3}\,r\,\mathrm{sen}\,\theta$ para o domínio $\Delta_{0AC} = \{(r\cos\theta, \sqrt{3}\,r\,\mathrm{sen}\,\theta); r \in [0,1], \theta \in [\arctan(1/\sqrt{3}), \pi/2]\}$ e mudança de variáveis $x = 3\,r\cos\theta$, $y = \sqrt{3}\,r\,\mathrm{sen}\,\theta$ para o domínio $\Delta_{0BC} = \{(3\,r\cos\theta, \sqrt{3}\,r\,\mathrm{sen}\,\theta); r \in [0,1], \theta \in [\arctan(3/\sqrt{3}), \pi/2]\}$ resulta em

$$\text{área}\,\Omega = 3\sqrt{3}\int_{\pi/3}^{\pi/2} d\theta \int_0^1 r\,dr - \sqrt{3}\int_{\pi/6}^{\pi/2} d\theta \int_0^1 r\,dr = 3\sqrt{3}\frac{\pi}{6}\frac{1}{2} - \sqrt{3}\frac{2\pi}{6}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{4\sqrt{3}}.$$

Questão 3: (2.5 pontos)

Calcular a integral de linha da função vetorial $F(x,y) = \big(2\,x, \cos y + 2y + \arctan y\big)$ ao longo da curva C parametrizada por $\gamma(\theta) = \big((1+\mathrm{sen}\,\theta)\cos\theta, (1+\mathrm{sen}\,\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta\big)$, $\theta \in [0,\pi]$.

Resposta: Observamos que $Q_x - P_y = 0$. A curva liga o ponto $\gamma(0) = (1,0)$ ao $\gamma(\pi) = (-1,0)$ e se encontra no primeiro e segundo quadrante. Considerando a curva C_2 parametrizado por $\beta(t) = (-1+t, 0)$, $t \in [0,2]$, pelo teorema de Green temos

$$\int_C F\cdot dr = -\int_{C_2} F\cdot dr = -\int_{t=0}^{t=2} F(\beta(t))\cdot(1,0)\,dt = -\int_0^2 2(t-1)\,dt = 0\,.$$

Questão 4: (2.5 pontos)

Calcular o valor da integral $I = \displaystyle\iiint_\Omega \big(x^2+y^2+z^2\big)\,dx\,dy\,dz$ onde $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2;\quad x^2+y^2+z^2 \leq x\}$.

Resposta: Completando o quadrado, observamos que $(x,y,z) \in \Omega$ satisfaz $(x-\frac{1}{2})^2 + y^2 + z^2 \leq \frac{1}{4}$. Usando coordenadas esféricas

$$y = \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\cos\theta,\quad z = \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta,\quad x = \rho\cos\varphi,\quad \text{com}\quad \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)}\right| = |\rho^2\,\mathrm{sen}\,\varphi| = \rho^2\,\mathrm{sen}\,\varphi,$$

o domínio Ω corresponde $0 \leq \rho \leq \cos\varphi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Temos então

$$\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}\,\varphi\,d\varphi \int_0^{\cos\varphi} \rho^2\,\rho^2\,d\rho = \frac{2\pi}{5}\int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}\,\varphi\,\cos^5\varphi\,d\varphi$$

$$= -\frac{\pi}{15}\cos^6\varphi\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{15}.$$