Questão 1: (2.5 pontos)

Calcule a integral

$$I = \int_0^1 \Big(\int_{e^x}^{e} \frac{xe^y}{(\ln y)^2} dy \Big) dx \ .$$

Solução:

Aplicamos o teorema de Fubini, observamos que

$$I = \iint_D \frac{xe^y}{(\ln y)^2} dxdy \ ,$$

onde $D = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq x \leq 1, \ e^x \leq y \leq e\Big\}$. Reescrevemos D como região de tipo II, $D = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \leq y \leq e, \ 0 \leq x \leq \ln y\Big\}$. Logo, aplicando o teorema de Fubini novamente, obtemos

$$I = \int_1^e \Big(\int_0^{\ln y} \frac{xe^y}{(\ln y)^2} dx \Big) dy = \int_1^e \frac{e^y}{2} dy = \frac{e^e - e}{2} \ .$$

Questão 2: (2.5 pontos)

Calcule a integral tripla

$$J = \iiint_W z^2 \, dxdydz$$

onde W é a região limitada pelas superfícies de equações $x^2 + y^2 = 4 + z^2$ e $z = x^2 + y^2 - 4$.

Solução:

A primeira superfície corresponde ao hiperbolóide de uma folha de equação $x^2 + y^2 - z^2 = 4$ e a segunda é o parabolóide de eixo O_z e de equação $z = x^2 + y^2 - 4$. Vamos utilizar coordenadas cilíndricas, isto é, a mudança de coordenadas dada por $(x = r\cos\theta, y = r \operatorname{sen}\theta, z = z)$. O hiperbolóide é dado, em coordenadas cilíndricas, por $r^2 = 4 + z^2$ e o parabolóide por $z + 4 = r^2$. Logo as duas superfícies se intersectam ao longo dos círculos de equações $(z = 0, r = 2)$ e $(z = 1, r = \sqrt{5})$. A região W, expressa em coordenadas cilíndricas, é dada por $W = \Big\{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 \leq \theta \leq 2\pi, \ 0 \leq z \leq 1, \sqrt{4 + z^2} \leq r \leq \sqrt{4 + z}\Big\}$. Então deduzimos da fórmula de mudança de variáveis que

$$J = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{\sqrt{4+z^2}}^{\sqrt{4+z}} z^2 r \, drdzd\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (z^3 - z^4) \, dzd\theta = \frac{\pi}{20} \ .$$

Questão 3: (2.5 pontos)

Calcule a integral de linha da função escalar $f(x, y) = |x|$ ao longo da curva C parametrizada por

$$\sigma : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \Big(e^t \cos t, e^t \operatorname{sen} t\Big) \ .$$

Solução:
Primeiramente, calculamos

$$\|\sigma'(t)\| = \Big(e^{2t}(\cos t - \operatorname{sen} t)^2 + e^{2t}(\operatorname{sen} t + \cos t)^2\Big)^{1/2} = \sqrt{2}e^t \ .$$

Logo, a integral de linha A é dada por

$$A = \int_C f ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|e^t \cos t\right| \sqrt{2}e^t dt = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t} \cos t dt \ .$$

Integrando por partes duas vezes, obtemos que

$$\frac{1}{\sqrt{2}}A = \frac{e^{2t}\cos t}{2}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{e^{2t}\operatorname{sen} t}{4}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{2}}A \ .$$

Portanto deduzemos que

$$A = \frac{\sqrt{2}}{5}\Big(e^{\pi} - 2\Big) \ .$$

Questão 4: (2.5 pontos)

Calcule a integral de linha do campo vetorial $F(x,y) = \Big(\frac{y^3}{3x} + e^{\cos x}, \operatorname{sen}(y^2) + 1\Big)$ ao longo da curva C, sendo C o bordo da região Ω definida pela interseção das seguintes regiões $3x^2 \geq \pi y$, $3x^2 \leq 2\pi y$, $y^2 \geq 2x$ e $y^2 \leq 4x$. Alem disso assumimos que C é orientada no sentido horário.

Solução:
Como a fronteira de Ω, $\partial\Omega = C$ é orientada negativamente, vale pelo teorema de Green

$$\oint_C F \cdot dr = -\iint_\Omega \Big(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\Big) dxdy = \iint_\Omega \frac{y^2}{x} dxdy \ .$$

Para calcular a integral dupla acima, efetuamos a mudança de variáveis $(u = \frac{y^2}{x}, v = \frac{x^2}{y})$. Observamos que $(x,y) \in \Omega$ se, e somente se $2 \leq u \leq 4$ e $\frac{\pi}{3} \leq v \leq \frac{2\pi}{3}$. Alem disso, calculamos o jacobiano

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \\ \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \end{vmatrix} = -3 \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{1}{3} \ .$$

Portanto vale pela fórmula de mudança de variáveis

$$W = \frac{1}{3}\int_2^4 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} u dv du = \frac{1}{3}\Big(\int_2^4 u du\Big)\Big(\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} dv\Big) = \frac{2\pi}{3} \ .$$

Duração da prova: duas horas

Regras:

- Não é permitida consulta a qualquer fonte e nem se ausentar da sala durante a prova
- Todo o material do aluno, com exceção de documento de identidade, lápis, caneta, régua, borracha deve ficar junto à mesa do professor
- Calculadoras, aparelhos celulares e similares devem ficar desligados na bolsa/mochila do aluno junto à mesa do professor
- O aluno deve apresentar o documento de identificação quando for assinar a folha de presença.
- A prova pode ser feita com lápis e/ou caneta.