Questão 1 (2.5 pontos)

Seja D o domínio do $\mathbb{R}^2$ dado por $\left\{(x,y) \text{ tais que } x^2+xy+y^2 \leqslant 1\right\}$. Calcule

$$\iint_D e^{x^2+xy+y^2}\,dxdy$$

Sugestão: Faça $x = u\cos\alpha - v\,\mathrm{sen}\,\alpha$, $y = u\,\mathrm{sen}\,\alpha + v\cos\alpha$ e escolha a constante α de forma que o termo misto uv desapareça do integrando.

Solução:

Fazendo a substituição recomendada tem-se que o integrando x^2+xy+y^2 composto com a mudança de coordenadas indicada se torna $u^2+v^2+(u^2-v^2)\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha + uv(\cos^2\alpha - \mathrm{sen}^2\,\alpha)$. Se eliminarmos o termo em uv esta expressão assumirá uma forma adequada para mudança de coordenadas elíptica. Se escolhermos $\alpha = \pi/4$ teremos uma mudança de coordenadas $\varphi(u,v) = (x(u,v), y(u,v)) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(u-v, u+v)$.

Esta é uma mudança de coordenadas linear cuja matriz jacobiana é

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

e cujo determinante jacobiano tem módulo 1. Aplicando esta mudança de coordenadas temos que

$$\iint_D e^{x^2+xy+y^2}\,dxdy = \iint_V e^{\frac{3}{2}u^2+\frac{1}{2}v^2}\,dudv,$$

sendo $V = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \text{ tais que } 3u^2+v^2 \leqslant 2\right\}$. Uma mundança de coordenadas elípticas da forma $u = \dfrac{\sqrt{6}}{3}r\cos\theta$ e $v = \sqrt{2}r\,\mathrm{sen}\,\theta$, com $r \in [0,1]$ e $\theta \in [0,2\pi)$ é adequada para o cálculo da integral dupla. O jacobiano desta mudança é $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}r$. Aplicando esta nova mudança de coordenadas temos que

$$\iint_D e^{x^2+xy+y^2}\,dxdy = \iint_V e^{\frac{3}{2}u^2+\frac{1}{2}v^2}\,dudv = \frac{2\sqrt{3}}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^1 e^{r^2} r\,dr = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}(e-1).$$

Questão 2 (2.5 pontos)

Calcule $\iiint_W z^2\,dxdydz$, onde

$$W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tais que } x^2+y^2+z^2 \geqslant 1,\ \ x^2+y^2+(z-2)^2 \leqslant 4 \text{ e } z \geqslant \sqrt{x^2+y^2}\right\}.$$

Solução:

O domínio pedido está no interior da esfera de raio 2, fora da esfera de raio 1 e acima da folha do cone. A mudança de coordenadas esférica parece ser adequada e esta é dada por $\Psi(\rho,\theta,\varphi) = (\rho\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi, \rho\cos\varphi)$. A esfera de raio 2 quando expressa em coordenadas esféricas é dada por $\rho = 4\cos\varphi$. A folha superior do cone expressa em coordenadas esféricas se reduz a $\varphi = \pi/4$.

Os limites de integração utilizando coordenadas esféricas são dados por $\theta \in [0, 2\pi)$, $\varphi \in [0, \pi/4]$ e $\rho \in [1, 4\cos\varphi]$. Temos, então, que

$$\iiint_W z^2\,dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_1^{4\cos\varphi} \rho^4\cos^2\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta =$$

$$\frac{1}{5}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4} 4^5\cos^7\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi - \cos^2\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi\,d\varphi\,d\theta =$$

$$\frac{2\pi}{5}\int_0^{\pi/4} 4^5\cos^7\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi - \cos^2\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi\,d\varphi \;=\; \frac{2\pi}{5}\left(-2^7\cos^8\varphi + \frac{1}{3}\cos^3\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi/4} =$$

$$\frac{2\pi}{5}\left(128 - 8 + \frac{\sqrt{2}}{12} - \frac{1}{3}\right) = 48\pi - \frac{2\pi}{15} + \frac{\sqrt{2}\pi}{30} = \frac{718\pi}{15} + \frac{\sqrt{2}\pi}{30}$$

Questão 3 (2.5 pontos)

Calcule $\displaystyle\int_C f\,ds$ onde C é a parte da curva dada por $4x^2 + 9y^2 = 36$ contida no primeiro quadrante, sendo $f(x,y) = xy$.

Solução:

A curva pedida é a porção da elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ restrita ao primeiro quadrante. Uma parametrização para esta curva é dada por $\sigma(\theta) = (3\cos\theta, 2\,\mathrm{sen}\,\theta)$, com $\theta \in [0, \pi/2]$. Segue que $\sigma'(\theta) = (-3\,\mathrm{sen}\,\theta, 2\cos\theta)$ e $|\sigma'(\theta)| = \sqrt{9\,\mathrm{sen}^2\,\theta + 4\cos^2\theta} = \sqrt{4 + 5\,\mathrm{sen}^2\,\theta}$.

Calculando a integral de linha de função escalar temos

$$\int_C f\,ds = \int_0^{\pi/2} 6\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\sqrt{4 + 5\,\mathrm{sen}^2\,\theta} =$$

$$\frac{2}{5}\left(4 + 5\,\mathrm{sen}^2\,\theta\right)^{3/2}\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{2}{5}(27 - 8) = \frac{38}{5}$$

Questão 4 (2.5 pontos)

Seja γ uma curva simples, C^1 por partes, contida no conjunto aberto

$$U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tais que } x > 0,\ y > 0\right\},$$

com exceção do ponto inicial $A = (1,0)$ e do ponto final $B = (2,0)$. Supondo que a área limitada pela curva γ e pelo eixo cartesiano x é dada por π, calcule

$$\int_\gamma \frac{[(6y+4)(x^2+y^2)-y]dx + xdy}{x^2+y^2}$$

Solução:

Seja $F(x,y) = \left(6y+4-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$. Vemos que a integral pedida corresponde à integral $\int_\gamma F.dr$.

Como a expressão da curva não é dada, não é possível realizar o cálculo direto da integral de linha. Seja C a curva orientada correspondente ao segmento de reta que liga os pontos A e B. Então $\gamma^- \cup C$ delimita uma região do $\mathbb{R}^2$ em que o campo vetorial F está bem definido e é de classe C^1. Seja D esta região. Observemos que a curva $\gamma^- \cup C$ está orientada positivamente para aplicação do Teorema de Green em D. Aplicando-o temos que

$$-\int_\gamma F.dr + \int_C F.dr = \iint_D \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} dxdy.$$

Derivando obtemos, após alguns cálculos, que $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = -6$. Segue que $\int_\gamma F.dr = 6A(D) + \int_C F.dr$, sendo $A(D)$ a área de D, que é igual a π, segundo o enunciado da questão. A curva C pode ser parametrizada por $\sigma(t) = (t+1,0)$, $t \in [0,1]$ e, portanto $\sigma'(t) = (1,0)$. Obtemos que $\int_C F.dr = \int_0^1 4\,dt = 4$.

Finalmente, obtém-se que $\int_\gamma F.dr = 6\pi + 4$.