Questão 1: (2.5 pontos)

Calcule o volume do sólido W, sabendo que W é a região contida em $\mathbb{R}^3$ cujos pontos (x, y, z) satisfazem $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$ e $x^2 + y^2 \geqslant a|x|$, sendo a uma constante maior que zero.

Solução:

Seja a superfície dada por $x^2 + y^2 = a|x|$. Se $x \geqslant 0$ temos que $(x - a/2)^2 + y^2 = a^2/4$, isto é, corresponde ao cilindro circular reto com eixo dado por $(a/2, 0, z)$, $z \in \mathbb{R}$ e raio $a/2$. Quando $x \leqslant 0$ temos que $(x + a/2)^2 + y^2 = a^2/4$, isto é, o cilindro circular reto com eixo dado por $(-a/2, 0, z)$, $z \in \mathbb{R}$ e raio $a/2$. Notemos que todos os pontos do primeiro cilindro satisfazem $x \geqslant 0$ e todos os pontos do segundo cilindro satisfazem $x \leqslant 0$. Portanto a região W é externa aos dois cilindros e está situada no interior da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Por simetria, basta calcular o volume de W restrita ao primeiro octante e multiplicar o resultado por oito. Seja D a região do primeiro quadrante limitada simultaneamente pelas circunferências $x^2 + y^2 = a^2$ e $(x - a/2)^2 + y^2 = a^2/4$. Utilizando coordenadas polares a circunferência $x^2 + y^2 = a^2$ é descrita por $r = a$ e a circunferência $(x - a/2)^2 + y^2 = a^2/4$ é descrita por $r = a\cos\theta$.. Esta região pode ser, então, caracterizada por $\theta \in [0, \pi/2]$ e, para cada θ fixo, $r \in [a\cos\theta, a]$. Então:

$$\mathrm{Vol}(W) = 8\iint_D \left(a^2 - (x^2 + y^2)\right)^{1/2} dA = 8\int_0^{\pi/2}\int_{a\cos\theta}^{a} (a^2 - r^2)^{1/2} r\,dr\,d\theta =$$

$$\frac{8a^3}{3}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3\theta\, d\theta = \frac{8a^3}{3}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\theta\cos^2\theta\, d\theta = \frac{16a^3}{9}$$

Obs. O uso de coordenadas esféricas para este problema envolve limites de integração mais complicados. A região W, restrita ao primeiro octante, expressa em coordenadas esféricas seria dada por $\theta \in [0, \pi/2]$, $\varphi \in [\pi/2 - \theta, \pi/2]$ e $\rho \in [a\cos\theta/\operatorname{sen}\varphi . a]$.

Questão 2: (2.5 pontos)

Calcular a integral tripla

$$J = \iiint_W z\, dxdydz$$

onde W é o sólido no primeiro octante limitado pelas superfícies de equações $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ e $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$, satisfazendo $z \leqslant \sqrt{3(x^2 + y^2)}$.

Solução:

A primeira superfície corresponde à esfera $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4$ e a segunda é a folha do cone $z^2 = 3(x^2 + y^2)$ com $z \geqslant 0$. Vamos utilizar coordenadas esféricas, isto é, a mudança de coordenadas dada por $x = \rho\cos\theta\operatorname{sen}\varphi$, $y = \rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi$ e $z = \rho\cos\varphi$. A folha do cone é dada, em coordenadas esféricas, por $\varphi = \pi/6$. A esfera é dada por $\rho = 4\cos\varphi$. Então, a região W, expressa em coordenadas esféricas, é dada por $\theta \in [0, \pi/2]$, $\varphi \in [\pi/6, \pi/2]$ e, para cada φ fixo, temos que $\rho \in [0, 4\cos\varphi]$. Então temos

$$J = \int_0^{\pi/2}\int_{\pi/6}^{\pi/2}\int_0^{4\cos\varphi} \rho^3 \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\, d\rho d\varphi d\theta = 64\int_0^{\pi/2}\int_{\pi/6}^{\pi/2} \operatorname{sen}\varphi\cos^5\varphi\, d\rho d\varphi d\theta = \frac{9\pi}{4}$$

Obs. O uso de coordenadas cilíndricas para este problema envolve dividir o sólido W em dois sólidos, de forma que cada um deles corresponda a uma região do tipo I. Em coordenadas cilíndricas o primeiro sólido é dado por $\theta \in [0, \pi/2]$, $r \in [0, \sqrt{3}]$ e $z \in [2 - \sqrt{4 - r^2}, \sqrt{3}r]$. O segundo sólido é dado por $\theta \in [0, \pi/2]$, $r \in [\sqrt{3}, 2]$ e $z \in [2 - \sqrt{4 - r^2}, 2 + \sqrt{4 - r^2}]$.

Questão 3: (2.5 pontos)

Calcule a integral de linha escalar $\int_\gamma xy\ ds$, sendo γ a curva em $\mathbb{R}^2$ dada por $x^2 + 4y^2 = 4$ ligando os pontos $(2, 0)$ e $(0, 1)$ pelo arco de menor comprimento.

Solução:

Precisamos determinar uma parametrização para a curva γ. Como as coordenadas x e y satisfazem $x^2 + 4y^2 = 4$, podemos tomar $x(\theta) = 2\cos\theta$ e $y(\theta) = \operatorname{sen}\theta$, com $\theta \in [0, \pi/2]$. Uma parametrização para γ será, então, $\sigma(\theta) = (2\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$. Daí, $\sigma'(\theta) = (-2\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$ e

$$|\sigma'(\theta)| = \left(4\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta\right)^{1/2} = \left(1 + 3\operatorname{sen}^2\theta\right)^{1/2}.$$

Também, se $f(x, y) = xy$, temos que $f(\sigma(\theta)) = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$. Finalmente,

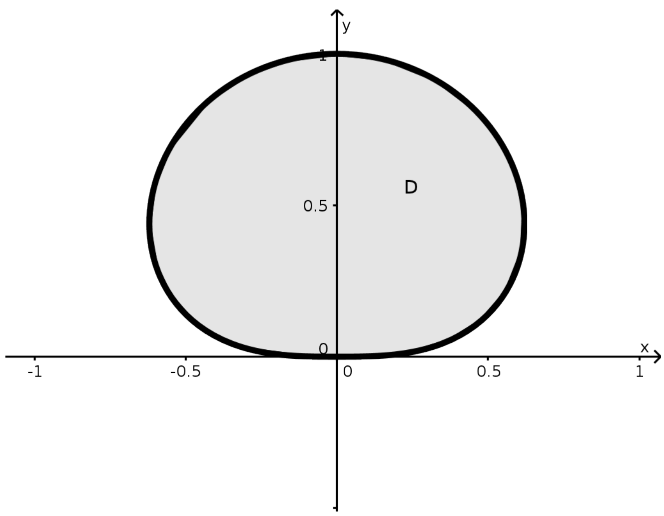
$$\int_\gamma xy\ ds = \int_0^{\pi/2} 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\left(1 + 3\operatorname{sen}^2\theta\right)^{1/2} d\theta = \frac{2}{9}\int_0^{\pi/2}\left(\left(1 + 3\operatorname{sen}^2\theta\right)^{3/2}\right)' d\theta = \frac{14}{9}$$

Questão 4: (2.5 pontos)

Calcule o trabalho do campo $F(x, y) = (-y^3, x^3 + y^4 e^{\arctan(y^8+1)})$ ao longo da curva C definida em coordenadas polares por $C : r^4 = \operatorname{sen}^2\theta$, com $\theta \in [0, \pi]$, $r \geqslant 0$ e orientada com θ crescente.

Solução:

Pela sua expressão vemos que C é uma curva simples, fechada e orientada no sentido anti-horário. Abaixo temos o gráfico desta curva.



O cálculo direto da integral de linha parece envolver integrais não triviais e o uso do Teorema de Green é indicado. Temos que $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} - \dfrac{\partial F_1}{\partial y} = 3(x^2 + y^2)$ e, pelo Teorema de Green, obtemos que

$$\oint_C F.dr = 3 \iint_D (x^2 + y^2) dxdy,$$

onde D é a região do plano xy delimitada pela curva C. Em coordenadas polares a região D é descrita do seguinte modo:

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \text{ tais que } \ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \ \text{ e } \ 0 \leqslant r \leqslant \sqrt{|\operatorname{sen}\theta|} \right\}.$$

Assim, usando o Teorema de Green e o teorema de mudança de variáveis aplicado às coordenadas polares temos

$$\oint_C F.dr = 3 \iint_D (x^2 + y^2) dxdy = 3 \int_0^{\pi} \int_0^{\sqrt{|\operatorname{sen}\theta|}} r^2 r dr d\theta = \frac{3}{4} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 \theta d\theta = \frac{3\pi}{8}$$