Questão 1: (2.5 pontos)

Considere a seguinte integral dupla

$$I = \int_0^{a \operatorname{sen} b} \int_{y \operatorname{cotg} b}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\, dxdy,$$

onde a e b são constantes satisfazendo $a > 0$ e $0 < b < \dfrac{\pi}{2}$.

(a) (1.0 ponto) Reescreva a integral com a ordem de integração invertida

Solução:
Seja D a região de integração. Note que

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tais que} \quad 0 \leqslant y \leqslant a \operatorname{sen} b \quad \text{e} \quad y \operatorname{cotg} b \leqslant x \leqslant \sqrt{a^2 - x^2}\right\}$$

é a região do primeiro quadrante que está dentro do disco $\{x^2 + y^2 \leqslant a^2\}$ e abaixo da reta $x = \operatorname{cotg} b$. Como a reta $x = \operatorname{cotg} b$ intercepta a circunferência $x^2 + y^2 = a^2$ nos pontos $\pm(a\cos b, a \operatorname{sen} b)$, podemos descrever D como o conjunto dos pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ satisfazendo

$$D = \{0 \leqslant x \leqslant a\cos b \;\text{ e }\; 0 \leqslant y \leqslant x \tan b\} \cup \left\{a \cos b \leqslant x \leqslant a \;\text{ e }\; 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{a^2 - x^2}\right\}.$$

Assim, a integral acima pode ser reescrita como

$$I = \int_0^{a\cos b} \int_0^{x \tan b} f(x,y)\, dydx + \int_{a\cos b}^{a} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)\, dydx.$$

(b) (1.5 ponto) Calcule a integral acima, considerando $f(x,y) = x^4 - y^4$.

Solução:
Escrevendo D em coordenadas polares obtém-se

$$D = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tais que} \quad 0 \leqslant r \leqslant a \quad \text{e} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant b\right\}. \tag{1}$$

Mas $x^4 - y^4 = (x^2+y^2)(x^2-y^2) = r^4(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) = r^4\cos(2\theta)$ e então

$$I = \int_0^b \int_0^a r^5 \cos(2\theta) drd\theta = \frac{a^6 \operatorname{sen}(2b)}{12},$$

Questão 2: (2.5 pontos)

Calcule a integral tripla

$$I = \iiint_W \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dxdydz,$$

onde W é o sólido contido no primeiro octante entre as esferas $x^2+y^2+z^2 = 4$ e $x^2+y^2+z^2 = 9$ e acima do cone $3z^2 = x^2+y^2$.

Solução:
Utilizaremos coordenadas esféricas, isto é, a mudança de coordenadas dada por $\Psi(\rho,\theta,\varphi) = (\rho\cos\theta \operatorname{sen}\varphi, \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, \rho\cos\varphi)$. A expressão para o cone em coordenadas esféricas é dada

por $3\rho^2\cos^2\varphi = \rho^2 \operatorname{sen}^2\varphi$. Considerando $\rho \neq 0$ obtemos que $\tan\varphi = \pm\sqrt{3}$ e, então, a folha superior do cone é dada por $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$. Como a região está contida no primeiro quadrante, temos que $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Como a região está acima do cone, temos que $\varphi \in \left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$, independente de θ. Finalmente, como a região está entre as duas esferas, temos que $\rho \in [2,3]$, independente de θ e φ. Além disso, a função a integrar, expressa em coordenadas esféricas, é dada por ρ. Então,

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_2^3 \rho^3 \operatorname{sen}\varphi \, d\rho d\varphi d\theta = \frac{65\pi}{16}.$$

Obs: O cálculo usando coordenadas cilíndricas envolve a divisão do volume em duas regiões, uma limitada pelas duas esferas (com r variando entre zero e o r que corresponde à interseção da esfera menor com o cone) e a outra limitada pelo cone e pela esfera maior (com o r variando entre os valores correspondentes à interseção do cone com cada uma das esferas).

Questão 3: (2.5 pontos)

Calcule o trabalho realizado pela força $F(x,y)$ para deslocar uma partícula do ponto $A(0,0)$ até o ponto $B(1,1)$ ao longo da curva definida por $y = x^5$, onde

$$F(x,y) = \left(\left(y + 2x^2y\right)e^{x^2+y} + x\cos(x^2),\ (x+xy)e^{x^2+y} + y^4\right) \tag{2}$$

Solução:

Vemos que o campo F está definido em todo o $\mathbb{R}^2$ e é de classe C^∞. Além disso, temos que

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = e^{x^2+y}\left(\left(1 + y + 2x^2 + 2x^2y\right) - \left(1 + 2x^2 + y + 2x^2y\right)\right) = 0.$$

Portanto, o campo F é conservativo (tem função potencial) e as integrais de linha não dependem do caminho. O cálculo da função potencial não parece ser imediato (ver obs. ao final), mas como o ponto inicial é $(0,0)$ e o ponto final é $(1,1)$ podemos considerar uma trajetória horizontal de $(0,0)$ a $(1,0)$ e, a seguir, vertical de $(1,0)$ a $(1,1)$. As parametrizações para estes segmentos de reta são, respectivamente, $\sigma_1(t) = (t,0)$ e $\sigma_2(t) = (1,t)$, ambas com $t \in [0.1]$. Então,

$$W = \int_C F.dr = \int_0^1 t\cos(t^2)\,dt + \int_0^1 (1+t)e^{1+t} + t^4\,dt = \frac{\operatorname{sen}(t^2)}{2} + te^{1+t} + \frac{t^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{5\operatorname{sen}1 + 10e^2 + 2}{10}.$$

Obs: O cálculo (mais trabalhoso) da função potencial nos levaria a obter $f(x,y) = xye^{x^2+y} + \operatorname{sen}(x^2)/2 + y^5/5$ e, então, $W = f(1,1) - f(0.0) = \dfrac{5\operatorname{sen}1 + 10e^2 + 2}{10}$. O cálculo direto da integral de linha da curva dada por $y = x^5$, leva a integrais bastante trabalhosas.

Questão 4: (2.5 pontos)

Seja $F : \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$F(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}(3y, -3x) + (ye^x, e^x). \tag{3}$$

Calcule $\oint_\gamma F.dr$, sendo γ uma curva parametrizada por $\sigma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\sigma(t) = ((7 + t(1-t))\cos(2\pi t), 13\operatorname{sen}(2\pi t)) \tag{4}$$

Solução:

Temos que

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{3}{x^2+y^2}\left(\left(-1 + \frac{2x^2}{x^2+y^2}\right) - \left(1 - \frac{2y^2}{x^2+y^2}\right)\right) + e^x - e^x = 0.$$

A curva γ é uma curva fechada, pois $\sigma(0) = \sigma(1)$ e contém a origem em seu interior. Além disso, (lembrando que $t \in [0,1]$), temos que $x^2(t) + y^2(t) = (7 + t(1-t))^2\cos^2(t) + 169\operatorname{sen}^2(t) \geqslant 49\cos^2 t + 169\operatorname{sen}^2 t \geqslant 49$ e, portanto, a curva Γ não intercepta nenhuma circunferência de raio menor que 7 e centro na origem. Observamos, também, que a orientação de Γ é anti-horária.

Iremos aplicar o Teorema de Green na região limitada externamente por Γ e internamente por uma circunferência de centro na origem e raio r_0, com $r_0 \in (0,7)$, orientada no sentido anti-horário. Denotaremos C esta circunferência. Observemos que o campo pode ser naturalmente escrito como $F(x,y) = G(x,y) + H(x,y)$, sendo $G(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}(-y,x)$ e $H(x,y) = (ye^x, e^x)$. Pelos cálculos realizados temos que estes satisfazem $\dfrac{\partial G_2}{\partial x} - \dfrac{\partial G_1}{\partial y} = \dfrac{\partial H_2}{\partial x} - \dfrac{\partial H_1}{\partial y} = 0$. Então, $H(x,y)$ é conservativo definido em todo o $\mathbb{R}^2$ e, como Γ é fechada, temos que $\oint_\Gamma H.dr = 0$. Então, podemos concluir que $\oint_\Gamma F.dr = \oint_\Gamma G.dr + \oint_\Gamma H.dr = \oint_\Gamma G.dr$. Aplicando o Teorema de Green temos que $\oint_\Gamma F.dr = \oint_\Gamma G.dr = \oint_C G.dr$ sendo C como descrito anteriormente.

Uma parametrização para C é dada por $\gamma(t) = (r_0\cos t, r_0\operatorname{sen} t)$, com $t \in [0, 2\pi)$. Daí, $\gamma'(t) = (-r_0\operatorname{sen} t, r_0\cos t)$ e $G(\gamma(t)) = \dfrac{3}{r_0}(\operatorname{sen} t, -\cos t)$. Concluímos que $G(\gamma(t)).\sigma'(t) = -3$ e $\oint_C G.dr = -6\pi$. Portanto, $\oint_\Gamma F.dr = -6\pi$.

Obs: No caso em que não se dividisse o campo $F(x,y)$ em dois como no gabarito, o cálculo da integral na circunferência C do termo correspondente a $\oint_C H.dr$ apresentaria dificuldades. Neste momento poderia ser aplicado o teorema de Green apenas para esta integral e obter que é nula, pois $H(x,y)$ é conservativo em $\mathbb{R}^2$.

Obs: **Todas** as curvas e regiões auxiliares utilizadas na resolução das questões deverão ser claramente identificadas, incluindo as orientações adotadas.