,

Questão 1: (2.0 pontos)

Calcule a integral dupla

$$I = \iint_D y\,e^x\,dxdy,$$

onde D é o paralelogramo de vértices nos pontos $A = (0,0)$, $B = (2,0)$, $C = (3,1)$ e $D = (1,1)$

Solução:

O conjunto D pode ser descrito por

$$D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ \ 0 \le y \le 1,\ \ y \le x \le y+2\Big\}.$$

Como D é do tipo 2, o Teorema de Fubini nos dá

$$I = \int_0^1 \left(\int_y^{y+2} y\,e^x\ dx\right) dy = \int_0^1 y\Big[e^{y+2} - e^y\Big]\,dy = (e^2 - 1)\int_0^1 y\,e^y\ dy.$$

Integrando por partes, obtemos

$$\int_0^1 y\,e^y\ dy = y\,e^y\Big|_0^1 - \int_0^1 e^y\ dy = 1.$$

Portanto, $I = e^2 - 1$. ■

Questão 2: (2.5 pontos)

Calcule a integral dupla

$$I = \iint_D \frac{dxdy}{(4x^2+y^2)^{3/2}},$$

onde

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ \ 1 \le x \le 2,\ \ |y| \le \frac{x}{2}\right\}$$

Solução:

Consideremos a mudança de variáveis

$$\vec{g}:\ \begin{cases} x = \dfrac{r}{2}\cos\theta, \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta. \end{cases}$$

Então o Jacobiano de $\vec{g}$ é

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\cos\theta}{2} & -\frac{r\,\mathrm{sen}\,\theta}{2} \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = \frac{r}{2}.$$

Logo, nas variáveis r e θ a integral I toma a forma

$$I = \frac{1}{2}\iint_Q \frac{1}{r^2} drd\theta,$$

onde Q a uma região do plano $r\theta$ que se transforma univocamente em D por $\vec{g}$.

Para determinar a região Q, observamos que

$$x > 0 \text{ e } |y| \leq \frac{x}{2} \iff -\frac{1}{2} \leq \frac{y}{x} \leq \frac{1}{2} \iff -\frac{1}{2} \leq 2\tan\theta \leq \frac{1}{2}.$$

Seja φ_0 o ângulo do primeiro quadrante tal que $\tan\varphi_0 = \frac{1}{4}$, isto é, $\varphi_0 = \arctan\frac{1}{4}$.

Portanto, podemos tomar θ no intervalo $[-\varphi_0, \varphi_0]$. Por outro lado, para cada θ no intervalo acima, temos

$$1 \leq x \leq 2 \iff 1 \leq \frac{r\cos\theta}{2} \leq 2 \iff 2\sec\theta \leq r \leq 4\sec\theta.$$

Logo, a região Q fica definida por

$$Q = \Big\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2\,;\ -\varphi_0 \leq \theta \leq \varphi_0,\ \ 2\sec\theta \leq r \leq 4\sec\theta\Big\}.$$

Portanto, pelo Teorema de Fubini,

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0}\left(\int_{2\sec\theta}^{4\sec\theta}\frac{dr}{r^2}\right)d\theta = \frac{1}{8}\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0}\cos\theta\,d\theta = \frac{1}{4}\operatorname{sen}\varphi_0.$$

Como $\tan\varphi_0 = \dfrac{1}{4}$, temos que $\sec\varphi_0 = \dfrac{\sqrt{17}}{4}$ e, daí, $\operatorname{sen}\varphi_0 = \dfrac{\sqrt{17}}{17}$. Substituindo obtemos que $I = \dfrac{\sqrt{17}}{68}$. ■

Questão 3: (2.5 pontos)

Determine o volume do sólido W dado por

$$W = \Big\{(x,y,z);\quad z \geq \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{e} \quad (x-1)^2+y^2+z^2 \leq 1\Big\}$$

Solução:

Vemos que o sólido é limitado superiormente pela esfera $(x-1)^2+y^2+z^2 = 1$ e inferiormente pelo cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$. Observe que a interseção destas superfícies é uma curva C cuja projeção no plano xy é a circunferência de equação $(x-\frac{1}{2})^2+y^2 = \frac{1}{4}$. De fato, basta substituir $z^2 = x^2+y^2$ na equação da esfera.

Vamos utilizar coordenadas esféricas:

$$\vec{g}: \begin{cases} x = \rho\operatorname{sen}\varphi\cos\theta \\ y = \rho\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta \\ z = \rho\cos\varphi. \end{cases}$$

Temos que

(a) $\varphi \in [0, \frac{\pi}{4}]$ (pois (x,y,z) está no interior do cone);

(b) $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, pois o disco no plano coordenado xy dado por $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ está contido no primeiro e quarto quadrantes e é tangente ao eixo coordenado y.

(c) ρ deverá variar entre zero e o valor na esfera, que dependerá de θ e φ.

Temos que $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1$ é equivalente a $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$. Expressando em coordenadas esféricas obtemos $\rho^2 = 2\rho \cos\theta \operatorname{sen}\varphi$. Assumindo que $\rho \neq 0$ temos que $\rho = 2\cos\theta \operatorname{sen}\varphi$ e, portanto, o limite de integração em ρ é dado por $\rho \in [0, 2\cos\theta \operatorname{sen}\varphi]$.

Portanto, usando a Teorema de Fubini e a fórmula de mudança de variáveis aplicada a coordenadas esféricas, temos que

$$\begin{aligned}
Vol.(W) &= \iiint_W dxdydz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\cos\theta \operatorname{sen}\varphi} (\rho^2 \operatorname{sen}\varphi) d\rho d\varphi d\theta \\
&= \frac{8}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}^4\varphi \cos^3\theta d\varphi d\theta = \frac{8}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}^4\varphi d\varphi \\
&= \frac{8}{3} \left(\operatorname{sen}\theta - \frac{\operatorname{sen}^3\theta}{3} \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \right) \cdot \left(\frac{12\varphi + \operatorname{sen}4\varphi - 8\operatorname{sen}2\varphi}{32} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \right) \\
&= \frac{8}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3\pi - 8}{32} = \frac{3\pi - 8}{9}.
\end{aligned}$$

■

Questão 4: (3.0 pontos)

Considere o segmento C_1 da reta $y = x$ contido no interior da elipse $16x^2 + 9y^2 = 1$ e orientado no sentido do x crescente.

(a) (1.0 ponto) Calcule $I_1 = \int_{C_1} (e^x y - 4y)dx + e^x dy$.

Solução:

A reta $y = x$ intercepta a elipse $16x^2 + 9y^2 = 1$ nos pontos $A = (-1/5, -1/5)$ e $B = (1/5, 1/5)$. Parametrizamos C_1 por $(x(t) = t, y(t) = t)$, $-1/5 \leq t \leq 1/5$. Daí, deduzimos, usando integração por partes, que

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-1/5}^{1/5} (e^t t - 4t)dt + \int_{-1/5}^{1/5} e^t dt \\
&= te^t \Big|_{-1/5}^{1/5} - \int_{-1/5}^{1/5} e^t dt - 2t^2 \Big|_{-1/5}^{1/5} + \int_{-1/5}^{1/5} e^t dt = \frac{1}{5}(e^{1/5} + e^{-1/5}) = \frac{2}{5} \cosh \frac{1}{5}.
\end{aligned}$$

■

(b) (2.0 pontos) Seja C_2 a parte da elipse $16x^2 + 9y^2 = 1$ contida acima do segmento C_1 e orientado no sentido anti-horário. Use o Teorema de Green para calcular $I_2 = \int_{C_2} (e^x y - 4y)dx + e^x dy$.

Solução:

Sejam D a região contida entre C_1 e C_2 e C a fronteira de D orientada positivamente.

Deduzimos do teorema de Green que

$$\oint_C (e^x y - 4y)dx + e^x dy = \iint_D (e^x - e^x + 4)dxdy = 4\,\text{area}(D).$$

Notemos que qualquer reta que passe pelo centro de uma elipse divide o seu interior em duas regiões de mesma área e, portanto, a área de D é a metade da área da elipse, isto é, $\text{area}(D) = \frac{\pi}{24}$. Por outro lado, $\oint_C (e^x y - 4y)dx + e^x dy = I_1 + I_2$, o que implica, usando o item (a), que

$$I_2 = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{5}(e^{1/5} + e^{-1/5}) = \frac{\pi}{6} - \frac{2}{5}\cosh\frac{1}{5}.$$

$\blacksquare$