13 de outubro de 2009
1ª Prova Unificada
Cálculo-III

Instituto de Matemática
Universidade Federal do Rio de Janeiro

---

1. Trocar a ordem da integração: $\displaystyle\int_{-2}^{0} dx \int_{\sqrt{-x(x+2)}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy$.

Solução: . $\displaystyle\int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-1-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx + \int_{0}^{1} dy \int_{-1+\sqrt{1-y^2}}^{0} f(x,y)\,dx + \int_{1}^{2} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{0} f(x,y)\,dx$.

2. Calcular a área da figura plana limitada pela curva $\left(x^2+y^2\right)^2 = 2xy$.

Solução: Equação polar da curva: $r^2 = \mathrm{sen}2\varphi$; $0 \le \varphi \le \pi/2$; $\pi \le \varphi \le 3\pi/2$;

$$A = \int_{\Omega} d\Omega = 2\int_{0}^{\pi/2} d\varphi \int_{0}^{\sqrt{sen2\varphi}} r\,dr = \int_{0}^{\pi/2} sen2\varphi\, d\varphi = 1.$$

3. Calcular o volume da região W do espaço R^3 definida por:

$W = \{(x,y,z) \in R^3 \mid x^2+y^2+\dfrac{z^2}{3} \le 1 \text{ e } z^2 \le x^2+y^2\}$.

Solução: $x = r\,\mathrm{sen}\theta\cos\varphi,\ y = r\,\mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\varphi,\ z = \sqrt{3}\,r\cos\theta;\ 0 \le \theta \le 2\pi;\ \pi/3 \le \varphi \le 2\pi/3;\ 0 < r \le 1$; $J(r,\theta) = \sqrt{3}r^2 sen\theta$; $\displaystyle\int_{W} dW = 2\pi\sqrt{3}\int_{\pi/3}^{2\pi/3} sen\theta\, d\theta \int_{0}^{1} r^2 dr = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

4. Calcular a integral de linha da função vetorial $\vec{F} =$

$$\left(\frac{108-36x}{\left(9x^2+4y^2-54x-32y+109\right)^3} - \frac{3}{(x+y-2)^4},\ \frac{64-16y}{\left(9x^2+4y^2-54x-32y+109\right)^3} - \frac{3}{(x+y-2)^4}\right)$$

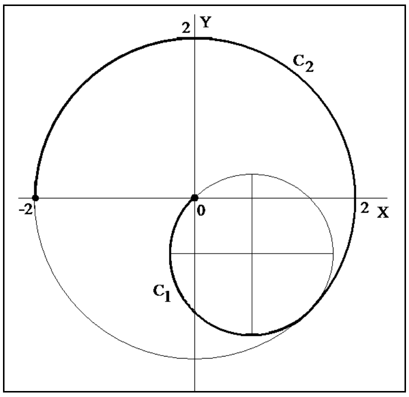
na curva dada pela equação $5x^2 - 29x - 6y + 42 = 0$, ligando os pontos $A(1,3)$ e $B(4,1)$, orientada do ponto A para o ponto B.

Solução: Seja C a referida curva. O campo é um campo gradiente num domínio simplesmente conexo contendo C, com função potencial:

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{\left(9x^2+4y^2-54x-32y+109\right)^2} + \frac{1}{(x+y-2)^3}.$$

Logo $\displaystyle\int_{C} P\,dx + Q\,dy = \Phi(4,1) - \Phi(1,3) = \frac{4}{81} - \frac{3}{16}$.

5. Calcular a integral de linha da função vetorial $\vec{F} = \left(1 - 2xsen(y) + 3x^2y^2,\quad 2x + 2yx^3 + x^2\cos(y)\right)$ ao longo da curva Γ formada por partes C_1 e C_2 das circunferências $\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$, ver Figura, com ponto inicial (0,0) e ponto final (-2,0).



Solução: utilizando teorema de Green:

$$\int_{\Gamma+\gamma} Pdx + Qdy = \int_{\Omega} \left(Q_x - P_y\right)d\Omega\ ,\ \gamma = \{x = t;\ y = 0;\ t \in (-2, 0)\};\ \int_{\Omega}\left(Q_x - P_y\right)d\Omega = 2\int_{\Omega} d\Omega = 6\pi\ ;$$

$$\int_{\gamma} Pdx = \int_{-2}^{0} dx = 2;\ \int_{\Gamma} Pdx + Qdy = 6\pi - 2.$$
