Gabarito da 1ª Prova Unificada de Cálculo III

Engenharia e Engenharia Química

05/05/2009

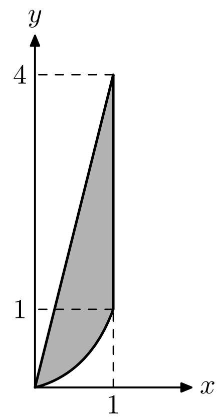
1ªQuestão: *Considere a integral*

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 \int_{x^2}^{4x} f(x,y)\,dydx.$$

Esboce graficamente a região D e expresse a integral da direita com a ordem trocada.

Solução: Pela expressão da integral da direita, temos

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le 4x\right\}.$$



Da figura, podemos expressar a região D da seguinte forma: $D = D_1 \cup D_2$, onde

$$D_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, 0 \le y \le 1,\ \frac{y}{4} \le x \le \sqrt{y}\right\}$$
$$D_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, 1 \le y \le 4,\ \frac{y}{4} \le x \le 1\right\}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)\,dxdy &= \iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dxdy \\ &= \int_0^1 \int_{y/4}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dxdy + \int_1^4 \int_{y/4}^{1} f(x,y)\,dxdy.\end{aligned}$$

2ªQuestão: *Calcule $\iint_D (x-y)^2 \operatorname{sen}^2(x+y)\,dxdy$, onde D é a região limitada pelas retas*

$$y = -x+\pi, \quad y = -x+3\pi, \quad y = x-\pi \quad \text{e} \quad y = x+\pi.$$

Solução: Consideremos a seguinte mudança de variáveis:

$$\begin{cases} u = x-y \\ v = x+y \end{cases} \implies \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 2 \implies \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{2}.$$

Então
$$I = \iint_D (x-y)^2 \operatorname{sen}^2(x+y)\, dxdy = \frac{1}{2} \iint_Q u^2 \operatorname{sen}^2(v)\, dudv,$$
onde Q é a região do plano que se transforma em D pelo campo $\vec{F} : (u,v) \mapsto (x,y)$. Vamos então determinar a região Q. Como o campo $\vec{F}$ é linear, transforma retas em retas. Logo, para determinar Q, basta identificar as retas que o limitam. Assim,

$$\begin{array}{ccccc} y = -x+\pi & \Rightarrow & y+x = \pi & \Rightarrow & v = \pi \\ y = -x+3\pi & \Rightarrow & y+x = 3\pi & \Rightarrow & v = 3\pi \\ y = x-\pi & \Rightarrow & y-x = -\pi & \Rightarrow & u = -\pi \\ y = x+\pi & \Rightarrow & y-x = \pi & \Rightarrow & u = \pi \end{array}$$

Portanto, Q é o retângulo $[-\pi,\pi] \times [\pi, 3\pi]$ do plano uv e a integral é dada por
$$I = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\pi}^{3\pi} u^2 \operatorname{sen}^2 v\, dvdu = \frac{1}{2} \left(\frac{u^3}{3} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right) \left(\frac{v}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2v)}{4} \Big|_{\pi}^{3\pi} \right) = \frac{\pi^4}{3}.$$

3ªQuestão: *Calcule o volume do sólido Ω definido por*
$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, x^2+y^2+z^2 \geq 4 \text{ e } x^2+y^2+z^2 \leq 4z\}.$$

Solução: A região Ω é a parte exterior da esfera $x^2+y^2+z^2 = 4$ que está contida no interior da esfera $x^2+y^2+(z-2)^2 = 4$. Este conjunto, em coordenadas esféricas, se escreve
$$\Omega = \{(\rho,\theta,\phi) \in \mathbb{R}^3 \,;\, 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq \phi \leq \phi_0,\ 2 \leq \rho \leq 4\cos\phi\}.$$
O ângulo ϕ_0 no qual ocorre a interseção das duas esfera é tal que $2 = 4\cos\phi_0$, isto é, $\phi_0 = \pi/3$. Portanto, o volume de Ω, calculado em coordenadas esféricas, é:
$$\begin{aligned} \operatorname{vol}(\Omega) &= \iiint_\Omega \rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho d\theta d\phi = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi/3} \left[\int_2^{4\cos\phi} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \right] d\phi \right) d\theta \\ &= 2\pi \left(\int_0^{\pi/3} \operatorname{sen}\phi \left[\frac{\rho^3}{3} \Big|_2^{4\cos\phi} \right] \right) d\phi = \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi/3} (4^3\cos^3\phi - 8) \operatorname{sen}\phi\, d\phi \\ &= \frac{2\times 4^3\pi}{3} \left[-\frac{\cos^4\phi}{4} \Big|_0^{\pi/3} \right] - \frac{2\times 2^3\pi}{3} \left[-\cos\phi \right]_0^{\pi/3} \\ &= \frac{2\times 4^2\pi}{3} \left[1 - \frac{1}{2^4} \right] - \frac{2\times 2^3\pi}{3} \left[1 - \frac{1}{2} \right] = \frac{22\pi}{3} \end{aligned}$$

4ªQuestão: *Determine o valor da integral de linha*
$$\int_\gamma (2x\operatorname{sen} y + x^3)\, dx + (x^2\cos y - y^3)\, dy,$$

onde γ é parametrizada por $\sigma(t) = (\cos^3 t, \operatorname{sen}^2 t)$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

Solução: Seja L a integral de linha a ser calculada. Vamos inicialmente verificar se o campo $\vec{F}(x,y) = (2x \operatorname{sen} y + x^3, x^2 \cos y - y^3)$ é um campo gradiente. Temos

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 2x \cos y = \frac{\partial F_1}{\partial y}.$$

Como o campo $\vec{F}$ é de classe C^1 en $\mathbb{R}^2$, a condição acima é necessária e suficiente para que ele seja um campo gradiente: $\vec{F} = \nabla f$.

Vamos então calcular a função potencial f. Integrando F_1 e relação a x e F_2 em relação a y, obtemos

$$f(x,y) = x^2 \operatorname{sen} y + \frac{x^4}{4} + A(y)$$
$$f(x,y) = x^2 \operatorname{sen} y - \frac{y^4}{4} + B(x)$$

Identificando as duas expressões acima, otemos $A(y) = -y^4/4$ e $B(x) = x^4/4$. Logo,

$$f(x,y) = x^2 \operatorname{sen} y + \frac{x^4}{4} - \frac{y^4}{4}.$$

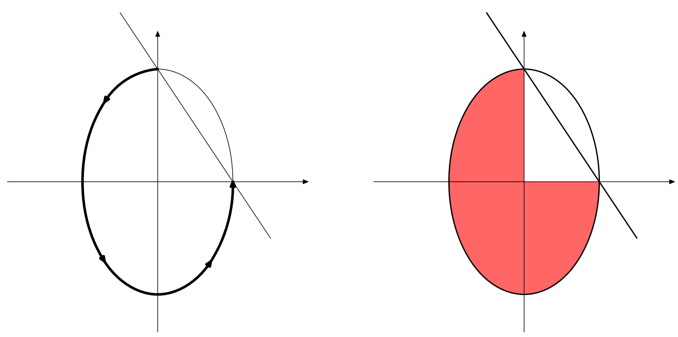
Assim, a integral L é dada pela diferença do potencial nos pontos final $\sigma(\pi/2) = (0,1)$ e incial $\sigma(0) = (1,0)$ da curva. Como $f(\sigma(\pi/2)) = f(0,1) = -1/4$ e $f(\sigma(0)) = f(1,0) = 1/4$, obtemos $L = -1/2$.

5ª Questão: *Calcule o trabalho do campo vetorial*

$$\vec{F}(x,y) = (4y + 2xe^{x^2-y}, 6x - e^{x^2-y})$$

sobre a a parte da curva $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ que se encontra abaixo da reta $2y + 3x = 6$, percorrida no sentido anti-horário.

Solução: Seja W o trabalho a ser calculado. A figura da esquerda ilustra a curva Γ sobre a qual o trabalho é realizado.



Consideremos a região D descrita pela segunda figura (a da direita). Pelo Teorema de Green, temos

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy = \oint_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

onde ∂D denota o contorno de D orientado positivamente, isto é, no sentido anti-horário. Como $\frac{\partial F_2}{\partial x} = 6 + 2xe^{x^2-y}$ e $\frac{\partial F_1}{\partial y} = 4 + 2xe^{x^2-y}$, obtemos

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2.$$

Logo,

$$\oint_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2(\text{área de } D) = 9\pi.$$

Por outro lado, $\partial D = \Gamma \cup C_1 \cup C_2$, onde C_1 é o segmento de reta que se liga o ponto $(2,0)$ ao ponto $(0,0)$ e C_2 é o segmento de reta que liga $(0,0)$ a $(0,3)$. Vamos então parametrizar cada um desses segmentos. Para C_1, temos $\sigma_1(t) = (2-t, 0), \quad 0 \leq t \leq 2$; para C_2, temos $\sigma_2(s) = (0, s), \quad 0 \leq s \leq 3$. Como

$$\oint_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

temos, pelo Teorema de Green

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 9\pi - \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Para concluir, basta que calculemos as duas integrais no lado direito da expresso acima. Temos:

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^2 \vec{F}(2-t, 0) \cdot (-1, 0)\, dt = -\int_0^2 2(t-2)e^{(t-2)^2}\, dt = \int_{-2}^0 2\xi e^{\xi^2}\, d\xi = 1 - e^4$$

$$\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^3 \vec{F}(0, s) \cdot (0, 1)\, ds = -\int_0^3 e^{-s}\, ds = e^{-3} - 1.$$

Portanto, concluímos que

$$W = 9\pi - (1 - e^4) - (e^{-3} - 1) = 9\pi + e^4 - e^{-3}.$$