P-F C-III 2023-1 © 2023 DM-IM-UFRJ

Questão 1. Determine o volume da parte do sólido que fica entre as superfícies $x^2+y^2+z^2=2z$ e $x^2+y^2+z^2=4z$ e acima da superfície $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

Resolução: Observemos que as esferas passam pela origem e tem centro em $(0,0,1)$ e $(0,0,2)$ respectivamente. As equações das esferas e o cone em coordenadas esféricas ficam como:

$$\rho_0 = 2\cos\phi;\ \rho_1 = 4\cos\phi;\ \rho\cos\phi = \sqrt{\rho^2\sin^2\phi\cos\phi + \rho^2\sin^2\phi\sin^2\phi} = \rho\sin\phi.$$

Da, ultima equação temos em particular que $\sin\phi = \cos\phi \implies \phi = \frac{\pi}{4}$. Portanto o sólido Ω em coordenas esféricas está definido como: $\Omega = \left\{(\theta,\phi,\rho)\in\mathbb{R}^3 : 0\le\theta\le 2\pi,\quad 0\le\phi\le\frac{\pi}{4},\quad 2\cos\phi\le\rho\le 4\cos\phi\right\}$. O volume de Ω é: $\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_{2\cos\phi}^{4\cos\phi}\rho^2\sin\phi\,d\rho d\phi d\theta = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_{2\cos\phi}^{4\cos\phi}\rho^2\sin\phi\,d\rho d\phi d\theta = \frac{112\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\phi\cos^3\phi\,d\phi = 7\pi.$

Questão 2. Seja C a curva contida no plano cartesiano yz cujos pontos satisfazem $y^2-8y+z^2=-12$. Encontre a área da superfície de revolução S obtida girando a curva C em torno do eixo z.

Resolução: Vamos a ordenar a equação $y^2-8y+z^2=-12;\ y^2-8y+16+z^2=-12+16\ (y-4)^2+z^2=4$. Assim temos uma circunferência de raio 2 no plano yz.

Método 1: (Teorema de Pappus-Guldin) $A(S)=\theta R\ell(C)$ sendo θ angulo de revolução, R o raio de revolução e $\ell(C)$ comprimento da curva. Em nosso caso $\theta=2\pi$, $R=4$ e $\ell(C)=4\pi$. Assim $A(S)=32\pi^2$.

Método 2: Temos $(y-4)^2+z^2=4;\ y=4\pm\sqrt{4-z^2}$. podemos obter duas parametrizações, ao rotar $y=4+\sqrt{4-z^2}$ vai sair a parte de foro do toro que denotamos por S_1 e ao rotar $y=4-\sqrt{4-z^2}$ a parte interna do toro que denotamos por S_2, assim o todo $S=S_1\cup S_2$, vamos a calcular a parte interna $y=4-\sqrt{4-z^2}$ a parte externa é análoga. Seja $\varphi(z,\theta)=(f(z)cos(\theta),f(z)sen(\theta),z)$ com $0\le\theta\le 2\pi$, $-2\le z\le 2$ e $f(z)=4-\sqrt{4-z^2}$, logo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi}{\partial z}(z,\theta) &= \left(\frac{z}{\sqrt{4-z^2}}cos(\theta),\frac{z}{\sqrt{4-z^2}}sen(\theta),1\right);\\
\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(z,\theta) &= \left(-\left(4-\sqrt{4-z^2}\right)sen(\theta),\left(4-\sqrt{4-z^2}\right)cos(\theta),0)\right)\\
\frac{\partial\varphi}{\partial z}(z,\theta)\times\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(z,\theta) &= \left(-\left(4-\sqrt{4-z^2}\right)cos(\theta),-\left(4-\sqrt{4-z^2}\right)sen(\theta),\left(4-\sqrt{4-z^2}\right)\frac{z}{\sqrt{4-z^2}}\right)\\
\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial z}(z,\theta)\times\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(z,\theta)\right\| &= \sqrt{\left(4-\sqrt{4-z^2}\right)^2+\left(4-\left(\sqrt{4-z^2}\right)\right)^2\frac{z^2}{4-z^2}}\\
&= \sqrt{\left(4-\sqrt{4-z^2}\right)^2\left(1+\frac{z^2}{4-z^2}\right)} = \sqrt{\left(4-\sqrt{4-z^2}\right)^2\left(\frac{4}{4-z^2}\right)} = \frac{2\left(4-\sqrt{4-z^2}\right)}{\sqrt{4-z^2}}.
\end{aligned}$$

Portanto

$$A(S_2)=\int_0^{2\pi}\int_{-2}^{2}\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial z}(z,\theta)\times\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(z,\theta)\right\|dzd\theta = 2\int_0^{2\pi}\int_{-2}^{2}\frac{4-\sqrt{4-z^2}}{\sqrt{4-z^2}}dzd\theta = 4\pi\left(4\int_{-2}^{2}\frac{1}{\sqrt{4-z^2}}dz-\int_{-2}^{2}dz\right)$$

$$=4\pi\left(4\left[arcsen\left(\frac{x}{2}\right)\right]_{-2}^{2}-4\right)=4\pi(4\pi-4)=16\pi^2-16\pi.$$

Do mesmo jeito $A(S_1)=16\pi^2+16\pi$, logo $A(S)=A(S_1)+A(S_2)=32\pi^2$.

Questão 3. Seja S o pedaço da esfera $x^2+y^2+z^2=R^2$ localizado acima do plano $z=-\frac{\sqrt{2}}{2}R$ e embaixo do plano $z=\frac{\sqrt{3}}{2}R$, onde $R>0$ é uma constante. Utilizando a definição da integral de superfície de função vetorial, calcule o fluxo I do campo $F = \left(\dfrac{xz}{x^2+y^2}, \ \dfrac{yz}{x^2+y^2}, \ z \right)$ através da S na direção do seu vetor normal n orientado para fora da esfera.

Resolução: Pela definição: $I = \int\limits_S (F \cdot n) dS$. Vetor normal unitário da superfície S: $n = \dfrac{1}{R}\big(x, \ y, \ z\big)$, então $I = \dfrac{1}{R} \int\limits_S (z + z^2) dS$. Parametrizando S: $x = R \sin\theta \cos\varphi, \ y = R \sin\theta \sin\varphi, \ z = R\cos\theta, \ \dfrac{\pi}{6} \leq \theta \leq \dfrac{3}{4}\pi, \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi$, temos: $dS = R^2 \sin\theta d\theta\varphi$, então $I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{\pi/6}^{3\pi/4} (\cos\theta + R\cos^2\theta) R^2 \sin\theta d\theta$. Calculando a integral dupla:

$$I = 2\pi R^2 \int\limits_{3\pi/4}^{\pi/6} \cos\theta d(\cos\theta) + 2\pi R^3 \int\limits_{3\pi/4}^{\pi/6} \cos^2\theta d(\cos\theta) = \pi R^2 \cos^2\theta \Big|_{3\pi/4}^{\pi/6} + \frac{2\pi R^3}{3} \cos^3\theta \Big|_{3\pi/4}^{\pi/6}$$

$$= \pi R^2 \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \right] + \frac{2\pi R^3}{3} \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 \right] = \frac{\pi R^2}{4} \left[1 + \sqrt{3}R + \frac{2\sqrt{2}}{3} R \right].$$

Questão 4. Utilize o Teorema de Stokes para calcular $\oint_C F \cdot dr$ onde $F(x, y, z) = (4x + y, \operatorname{sen}(y), x^2 z - y)$ e C é a curva obtida pela interseção do plano $x + z = 1$ com a esfera $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$. Oriente a curva de forma que sua projeção no plano cartesiano xy esteja orientada no sentido anti-horário.

Resolução: Pelo teorema de Stokes temos $\int_C F dr = \iint_S rot(F) n ds$, onde C é o bordo de S. Calculemos o rotacional

$$rot(F)(x, y, z) = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) = (-1, -2xz, -1).$$

Parametrizando a superfície S, a qual pode ser vista em sua forma explicita, $\varphi(x, y) = (x, y, 1-x), (x, y) \in D$ onde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 2x^2 + y^2 \leq 1\}$. Logo $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \times \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = (1, 0, 1)$ com a qual a curva C fica orientada de forma que sua projeção no plano cartesiano xy esteja orientada no sentido anti-horário. Portanto

$$\iint_S rot(F) n ds = \iint_D (-1, -2x(1-x), -1)(1, 0, 1) dx dy = -2 \iint_D dx dy = -2 Area(D) = -2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \pi \right).$$