Instituto de Matemática - IM/UFRJ
Cálculo Diferencial e Integral III
2ª Prova. - 16/11/2023

Questão 1: (2.5 pontos)

Considere a região $Q \subset \mathbb{R}^3$ definida da seguinte forma:

$$Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 4,\ z \ge x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 \le 1\}.$$

(a) [0.5] Esboce a região Q.

(b) [2.0] Calcule a área da superfície que é fronteira de Q.

Solução: Note primeiramente que $z \geqslant x^2+y^2$ implica que estamos na região $z \geqslant 0$. Além disso, fazendo a interseção entre a esfera $x^2+y^2+z^2 = 4$ e o paraboloide $z = x^2+y^2$, encontramos que $z^2+z-4 = 0$, cuja solução positiva é $z = \frac{\sqrt{17}-1}{2} > \frac{4-1}{2} = \frac{3}{2}$, portanto temos que $x^2+y^2 = z > 3/2$ na interseção. Assim, a região compreendida entre a parte superior da esfera $x^2+y^2+z^2 = 4$ e o parabolóide $z = x^2+y^2$ contém inteiramente a porção do cilindro $x^2+y^2 = 1$ com $1 \leqslant z \leqslant \sqrt{3}$, onde $z = 1$ é o plano onde acontece a interseção entre o parabolóide e o cilindro, e $z = \sqrt{3}$ é o plano onde acontece a interseção entre a parte superior da esfera e o cilindro. Assim, se $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leqslant 1\}$ é a projeção do interior do cilindro no plano xy, então a superfície S em questão pode então ser escrita como $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, onde

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, (x, y) \in D\}, \tag{1}$$
$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 1 \leqslant z \leqslant \sqrt{3}\}, \tag{2}$$
$$S_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, (x, y) \in D\}, \tag{3}$$

e temos que

$$A(S) = A(S_1) + A(S_2) + A(S_3), \tag{4}$$

onde $A(S)$ denota a área da superfície S. Observe que, como S_2 é um cilindro de raio 1 e altura $\sqrt{3} - 1$, temos

$$A(S_2) = \pi(\sqrt{3} - 1). \tag{5}$$

Resta calcular as áreas de S_1 e S_3. Para isso, notamos que S_1 é o gráfico da função $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $(x, y) \in D$, e que S_3 é o gráfico da função $g(x, y) = x^2 + y^2$, $(x, y) \in D$. Logo,

$$\begin{aligned} A(S_1) &= \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dA, \\ &= 2 \iint_D \frac{dA}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \end{aligned} \tag{6}$$

e

$$\begin{aligned} A(S_3) &= \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dA \\ &= \iint_D \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}\, dA. \end{aligned} \tag{7}$$

Agora notamos que em coordenadas polares $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$ o disco D é descrito por

$$\{(r,\theta) : 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant r \leqslant 1\}.$$

Portanto, usando coordenadas polares e a equação (6) vem

$$\begin{aligned} A(S_1) &= 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-r^2}} r\,dr\,d\theta \\ &= -2\int_0^{2\pi} (4-r^2)^{1/2}\Big|_{r=0}^{r=1} d\theta \\ &= 2\int_0^{2\pi}(2-\sqrt{3})d\theta \\ &= 4\pi(2-\sqrt{3}). \end{aligned} \tag{8}$$

Por outro lado, usando coordenadas polares e a equação (7), temos:

$$\begin{aligned} A(S_3) &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{4r^2+1}\, r\,dr\,d\theta \\ &= \frac{1}{12}\int_0^{2\pi} (4r^2+1)^{3/2}\Big|_{r=0}^{r=1} d\theta \\ &= \frac{1}{12}\int_0^{2\pi}(5\sqrt{5}-1)d\theta \\ &= \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1). \end{aligned} \tag{9}$$

Finalmente, usando as equações (4), (8), (5) e (9) temos

$$A(S) = \pi(\sqrt{3}-1) + 4\pi(2-\sqrt{3}) + \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1).$$

Questão 2: (2.5 pontos)

Determine a integral de superfície vetorial

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S},$$

o campo vetorial é $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ e a superfície S é o hemisfério superior da esfera $x^2+y^2+z^2 = 9$, localizada dentro cilindro $x^2+y^2 = 3x$ e orientada com normal apontando para fora da esfera.

Solução: Vide o pdf em anexo

Questão 3: (2.5 pontos)

Calcule a integral de linha $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(2+z^2, x^3 + \ln\left(\frac{1}{1+y^4}\right), 2zx + \arctan(z^2+1)\right)$$

e C é a interseção do cilindro $x^2+z^2 = 1$ com o plano $z+2y = 4$ orientada no sentido anti-horário quando vista de cima.

Solução: Podemos aplicar o Teorema de Stokes utilizando S, o pedaço do plano $z + 2y = 4$ dentro do cilindro orientado com normal apontando para cima. Note que

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = (0, 0, 3x^2)$$

A parametrização de S é

$$x = x, y = y, z = 4 - 2y, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Então

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_S (0, 0, 3x^2) \cdot d\vec{S} = \iint_D (0, 0, 3x^2) \cdot (0, 2, 1)\, dx\, dy \\ &= \iint_D 3x^2\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 3r^3 \operatorname{sen}^2(\theta)\, dr\, d\theta = \frac{3\pi}{4}.\end{aligned}$$

Questão 4: (2.5 pontos)

Calcule o fluxo do campo vetorial $\vec{F}(x, y, z) = (x^3, y^3, xy)$ através da superfície $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + (2z)^2 = 1, z \geq 0\}$ orientada com normal apontando para cima.

Solução: Aplicaremos o teorema de Gauss em relação com o sólido $M = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + (2z)^2 \leq 1, z \geq 0\}$. Então, $\partial M = S \cup P$, com $P = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ orientado para abaixo, e

$$\iiint_M \operatorname{div} F dxdydz = \int_S F \cdot dA + \int_P F \cdot dA$$

Usando $(x, y) = r(\cos\theta, \sin\theta)$,

$$\begin{aligned}\iiint_M \operatorname{div} F dxdydz &= 3 \iint_{x^2+y^2\leq 1} x^2 + y^2 \int_0^{\frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{2}} dz \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 \int_0^{\frac{\sqrt{1-r^2}}{2}} dzdrd\theta = 3\pi \int_0^1 r^3 \sqrt{1 - r^2} dr.\end{aligned}$$

Depois, usando integração por partes, $\partial_r \frac{-1}{3} \sqrt{1 - r^2}^3 = r\sqrt{1 - r^2}$ e a substituição $u = r^2$,

$$\begin{aligned}\iiint_M \operatorname{div} F dxdydz &= \cdots = 3\pi \int_0^1 r^2 r \sqrt{1 - r^2} dr \\ &= 3\pi r^2 \frac{-1}{3} \sqrt{1 - r^2}^3 \Big|_0^1 - 3\pi \int_0^1 2r \frac{-1}{3} \sqrt{1 - r^2}^3 dr \\ &= 0 + \pi \int_0^1 \sqrt{1 - u}^3 du = \frac{-2\pi}{5} \sqrt{1 - u}^5 \big|_0^1 = \frac{2\pi}{5}.\end{aligned}$$

Basta determinar $\int_S F \cdot dA$. Fixando a parametrização $(r, \alpha) \mapsto (r\cos\alpha, r\sin\alpha, 0)$ de P,

$$N = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -r\sin\alpha & r\cos\alpha & 0 \end{pmatrix} = (0, 0, r).$$

Daí, como a parametrização induz a orientação oposta,

$$\begin{aligned} \int_P F \cdot dA &= -\iint \langle (0, 0, r^2 \sin\alpha\cos\alpha), (0, 0, r) \rangle dr d\alpha \\ &= -\iint r^3 \sin\alpha\cos\alpha d\alpha dr = -\int_0^1 r^3 dr \int_0^{2\pi} \sin\alpha\cos\alpha d\alpha = 0. \end{aligned}$$

Então, $\int_S F \cdot dA = \frac{2\pi}{5}$.

Versão da integral do volume. Ou, por substituição trigonometrica $r = \sin\alpha$ seguida por $u = \cos\alpha$

$$\begin{aligned} 3\pi \int_0^1 r^3 \sqrt{1 - r^2} dr &= 3\pi \int_0^{\pi/2} \sin^3\alpha \sqrt{1 - \sin^2\alpha} \cos\alpha d\alpha \\ &= 3\pi \int_0^{\pi/2} \sin\alpha (1 - \cos^2(\alpha)) \cos^2\alpha d\alpha \\ &= 3\pi \int_0^1 (1 - u^2) u^2 du = 3\pi \left(\frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{5}u^5 \right) \Big|_0^1 = \frac{2\pi}{5}. \end{aligned}$$