Questão 1. Seja S o pedaço do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, acima do plano $z = 1$ e embaixo do plano $x + 2z = 3$. Calcule a área da superfície S.

Resolução: Calculamos a interseção do cone com os planos:

1. $\{z = \sqrt{x^2 + y^2}\} \cap \{x + 2z = 3\}$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = z = \left(\frac{3}{2} - \frac{x}{2}\right) \Longleftrightarrow \frac{(x+1)^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

2. $\{z = \sqrt{x^2 + y^2}\} \cap \{z = 1\}$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = z = 1 \Longleftrightarrow x^2 + y^2 = 1$$

Domínio D ou Área:

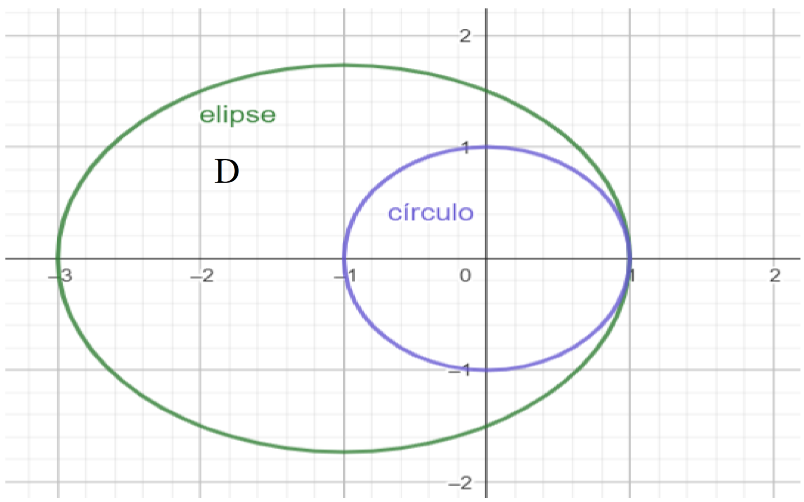

Figure 1: Projeção da superfície S no plano xy

Área da elipse e do circulo: $A(elipse) = 2\sqrt{3}\pi$ e $A(circulo) = \pi$. Parametrização da superfície:

$$\sigma(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2}) \quad (x, y) \in D.$$

com diferencial de área de superfície: $ds = ||\sigma_x \times \sigma_y|| dA(x, y) = \sqrt{2} dA(x, y)$. A área da superfície S:

$$A(S) = \iint_D ||\vec{\sigma}_x \times \vec{\sigma}_y|| \, dA(x, y) = \sqrt{2}\Big(A(elipse) - A(circulo)\Big) = \sqrt{2}\pi\Big(2\sqrt{3} - 1\Big).$$

Questão 2. Utilize o teorema de Stokes para calcular $\displaystyle\int_C F \cdot dr$, onde

$$F(x, y, z) = \left(e^z + \frac{5y^3}{3}, e^z - \frac{5x^3}{3}, 2xz + 2yz\right)$$

e C é a curva dada pela interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e plano $x + y + z = 1$. Oriente a curva de forma que sua projeção no plano cartesiano xy esteja orientada no sentido anti-horário.

Resolução: Pelo teorema de Stokes temos $\int_C Fdr = \iint_S rot(F)nds$, onde C é o bordo de S. Calculamos o rotacional

$$rot(F)(x,y,z) = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) = (2z - e^z, e^z - 2z, -5x^2 - 5y^2).$$

Parametrizando a superfície S, a qual pode ser vista em sua forma explicita,

$$\varphi(x,y,z) = (x, y, 1-x-y), (x,y) \in D$$

onde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$. Logo $\frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} = (1,1,1)$. Com essa normal a curva é orientada no sentido anti-horário quando for projetada no plano xy. Portanto

$$\iint_S rot(F)nds = \iint_D (2z - e^z, e^z - 2z, -5x^2 - 5y^2)(1,1,1)dxdy = \iint_D (-5x^2 - 5y^2)dxdy.$$

Usando mudança polar $x = rcos(\theta)$ $y = rsen(\theta)$, $J = r$ $0 \leq r \leq 1$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$, logo

$$\int_C Fdr = -5 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 drd\theta = -\frac{5\pi}{2}.$$

Questão 3. Utilize o teorema de Gauss para calcular $\displaystyle\iint\limits_S (F \cdot n)ds$, onde $F(x,y,z) = (x^3 + xy^2, x^2y + y^3, xy)$ e S é a fronteira da região D dada por $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 \leq R^2$ e $-h \leq z \leq h\}$, sendo R e h constantes positivas. Considere o vetor n apontando para dentro da região D.

Resolução: Calculamos a divergente $div(F)(x,y,z) = 3x^2 + y^2 + x^2 + 3y^2 = 4x^2 + 4y^2$. Logo do teorema de Gauss (lembre que precisamos o vetor normal apontando para fora da região D)

$$\iint_{\partial S} (F \cdot n)ds = -\iiint_D (4x^2 + 4y^2)dxdy$$

usando coordenadas cilíndricas

$$x = rcos(\theta), \qquad y = rsen(\theta), \qquad z = z$$

onde $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq R$ e $-h \leq z \leq h$ e $J = r$, portanto

$$\iint_S F = -\iiint_D (4x^2 + 4y^2)dxdy = -\int_{-h}^{h} \int_0^{2\pi} \int_0^R (4r^2)rdrd\theta dz = -4(2h)(2\pi)\left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=R} = -4h\pi R^4.$$

Questão 4. Considere o campo vetorial $F(x,y,z) = \left(ye^z + z,\ xe^z - \dfrac{2}{3},\ xye^z + x\right)$ e a curva C obtida como a interseção da parte da superfície $y = x^2 - 1$ onde $y \leq 0$ com o plano $x + z = 1$, orientada no sentido de decrescimento de z. Calcule a integral de linha $\displaystyle\int\limits_C F \cdot dr$.

Resolução: A curva C a qual é a interseção do cilindro e o plano tem ponto inicia em $A = (-1,0,2)$ e ponto final em $B = (1,0,0)$.

Calculamos o rotacional do campo $F(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$:

$$\mathbf{Rot}(\vec{F})(x,y,z) = \left(\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\right) = (xe^z - xe^z, -(ye^z + 1 - ye^z - 1), e^z - e^z) = 0, \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Pelo tanto, $\vec{F}$ é conservativo. Pelo Teorema 7.4 item (ii) do livro de Diomara e Cândida, sabemos que a integral de linha independe da trajetória. Escolhemos uma trajetória de A até B: $\gamma_{AB}(t) = (2t - 1, 0, 2 - 2t) \quad t \in [0,1]$ e tem derivada $\gamma'_{AB}(t) = (2, 0, -2) \quad t \in [0,1]$. Logo, calculamos $\vec{F}(\gamma_{AB}(t)) \cdot \gamma'_{AB}(t) = 6 - 8t$. Portanto,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \vec{F}(\gamma_{AB}(t)) \cdot \gamma'_{AB}(t)\, dt = 2.$$