Instituto de Matemática - IM/UFRJ
Cálculo Diferencial e Integral III
1ª Prova. - 08/05/2025

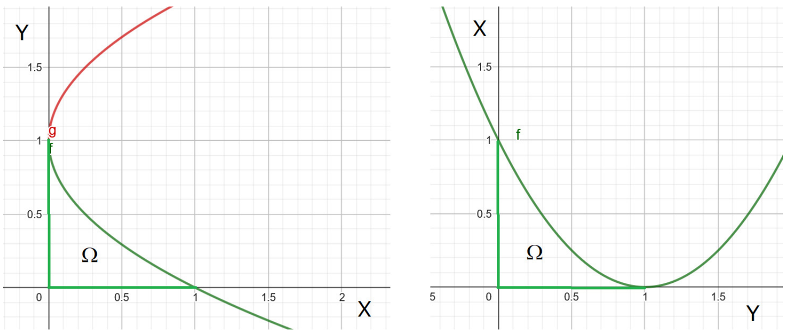
Questão 1: (2.5 pontos)
Calcule a integral dupla

$$\int_0^1 \left(\int_0^{1-\sqrt{x}} \cos((y-1)^3)\, dy \right) dx$$

Resolução: Para resolver a integral iterada, vamos trocar a ordem da integração. Observe que

$$\int_0^1 \left(\int_0^{1-\sqrt{x}} \cos((y-1)^3)\, dy \right) dx = \iint_\Omega \cos((y-1)^3)\, dA,$$

onde Ω é a região esboçada abaixo:



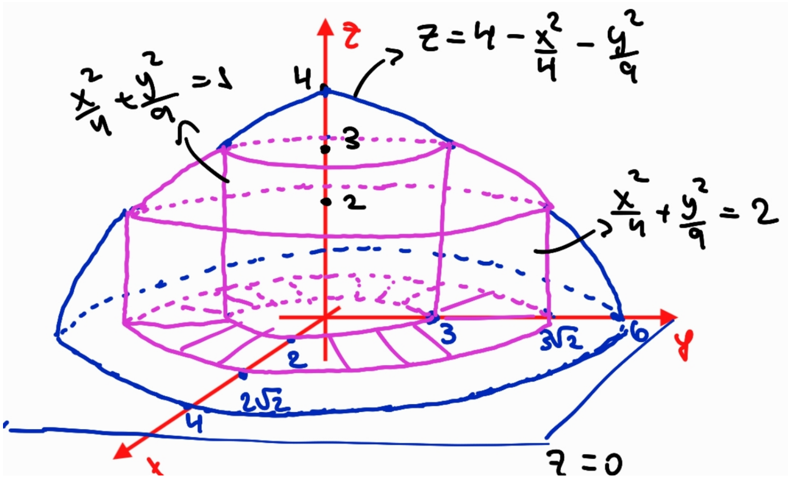
Podemos descrever Ω como uma região do tipo 2, fazendo $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq x \leq (y-1)^2$ Daí,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(\int_0^{1-\sqrt{x}} \cos((y-1)^3)\, dy \right) dx &= \int_0^1 \int_0^{(y-1)^2} \cos((y-1)^3)\, dx\, dy \\
&= \int_0^1 \cos((y-1)^3)(y-1)^2\, dy \\
&= \int_{-1}^0 \frac{1}{3} \cos(u)\, du = -\frac{1}{3}(\text{sen}(-1)) = \frac{1}{3}\,\text{sen}(1).
\end{aligned}$$

Observe que na terceira igualdade, substituimos $u = (y-1)^3$ e $du = 3(y-1)^2\, dy$

Questão 2: (2.5 pontos)
Calcule o volume do sólido Ω limitado pelo plano $z = 0$, pelo parabolóide elíptico $z = 4 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}$ e pelos cilindros $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ e $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 2$.

Resolução: Observe que Ω tem o seginte esboço:



E então podemos escrever Ω como região tipo I

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 4 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}, 1 \leq \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 2\}$$

E então

$$Vol(\Omega) = \iint_{Proj_{xy}(\Omega)} \int_0^{4-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}} 1 dz dA$$

$$Vol(\Omega) = \iint_{Proj_{xy}(\Omega)} 4 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} dA \tag{1}$$

Obs.: Caso decida calcular o volume por integral dupla, a solução começa na equação (1).

Sendo $Proj_{xy}(\Omega) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 2\}$, utilize coordenadas polares adaptadas ao caso eliptico

$$x = 2r\cos(\theta),\ y = 3r\,\mathrm{sen}(\theta)$$

$$1 \leq r \leq \sqrt{2},\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Não esquecendo de adaptar o jacobiano para $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = 6r$. Portanto, a equação (1) se transforma em

$$Vol(\Omega) = \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{2}} (4 - r^2) 6r dr d\theta = 15\pi$$

Questão 3: (2.5 pontos)

Calcule a integral de linha escalar

$$\int_\gamma e^x y\, ds$$

onde γ é a parte da curva $x = \ln(y)$ entre os pontos $(0, 1)$ e $(1, e)$.

Solução: A curva γ pode ser parametrizada por $\vec{r}(t) = (\ln(t), t)$ com $t \in [1, e]$. Neste intervalo, temos $\vec{r}\,'(t) = (\frac{1}{t}, 1)$, então $|\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{\frac{1}{t^2} + 1} = \frac{1}{t}\sqrt{1+t^2}$ e

$$\int_\gamma e^x y\, ds = \int_1^e t^2\left(\frac{1}{t}\sqrt{1+t^2}\right) dt = \int_1^e t\sqrt{1+t^2}\, dt = \frac{1}{3}\left[(1+t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_1^e = \frac{(1+e^2)^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}}{3}.$$

Alt: A curva γ pode ser parametrizada por $\vec{r}(t) = (t, e^t)$ com $t \in [0,1]$, $\vec{r}\,'(t) = (t, e^t)$, então $|\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{1+e^{2t}}$ e

$$\int_\gamma e^x y\, ds = \int_0^1 e^{2t}\sqrt{1+e^{2t}}\, dt = \frac{1}{3}\left[(1+e^{2t})^{\frac{3}{2}}\right]_1^e = \frac{(1+e^2)^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}}{3}.$$

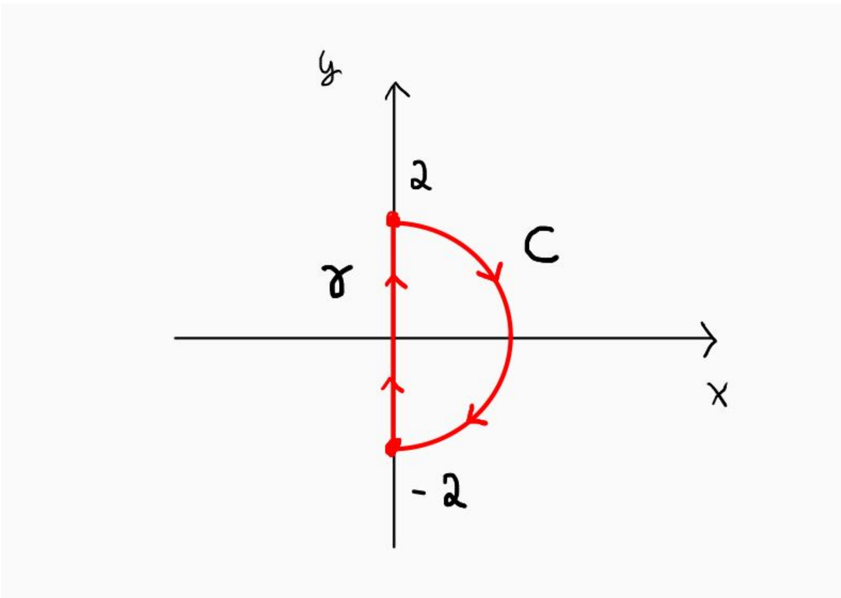
Questão 4: (2.5 pontos)
Considere C a curva dada por $x = 2\,\mathrm{sen}(t)$, $y = 2\cos(t)$, com $t \in [0, \pi]$. Calcule

$$\int_C (x^2 \ln(x+1) + 6xy^2 - y)\, dx + \left(\frac{1}{y+3} + (6y+1)x^2\right) dy.$$

Solução: Iremos aplicar o Teorema de Green para resolver a integral de linha. Observe que

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2x + 1.$$

Para aplicar Green, devemos fechar a curva C com um segmento de reta γ ligando $(0,-2)$ à $(0,2)$. A curva $C_1 = C \cup \gamma$ é agora fechada e limita um semi-círculo R. Observe que C_1 é percorrida no sentido horário.



Portanto, pelo Teorema de Green:

$$\int\limits_{C_1} \vec{F} \cdot d\mathbf{r} = -\iint_R (2x+1)\,dx\,dy \Rightarrow \int\limits_{C} \vec{F} \cdot d\mathbf{r} = -\iint_R (2x+1)\,dx\,dy - \int\limits_{\gamma} \vec{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Para calcular a integral dupla, usamos coordenadas polares (r, θ). A região R é descrita como $0 \leq r \leq 2$ e $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Daí

$$\iint_R (2x+1)\,dx\,dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 (2r\cos(\theta)+1)\,r\,dr\,d\theta = \frac{32}{3} + 2\pi.$$

Já o segmento γ é parametrizado com $x = 0$, $y = t$, $t \in [-2, 2]$. Daí

$$\int\limits_{\gamma} \vec{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{-2}^{2} \frac{1}{t+3}\,dt = \ln(5).$$

Finalmente,

$$\int\limits_{C} \vec{F} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{32}{3} - 2\pi - \ln(5).$$