

Instituto de Matemática - IM/UFRJ  
Cálculo Diferencial e Integral III  
1ª Prova. - 28/09/2023

---

**Questão 1:** (2.5 pontos)

Considere o domínio plano localizado no 1º quadrante e limitado por  $x^2 + \frac{y^2}{3} = 1$ ,  $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{9} = 1$ ,  $y = 0$  e  $y = x$ .

- (a) [1.0] Escreva a integral dupla que define a área deste domínio na forma iterada em coordenadas cartesianas  $(x, y)$ .
- (b) [1.5] Usando uma mudança de variáveis apropriada, calcule a área deste domínio.

**Questão 2:** (2.5 pontos)

Calcule a integral tripla  $\iiint_Q \frac{dV}{x^2 + y^2 + z^2}$

onde  $Q = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 12; x^2 + y^2 + z^2 \geq 4z; z \geq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}} \right\}$ .

**Questão 3:** (2.5 pontos)

Calcule a integral de linha escalar

$$\int_C (x^2 - y^2)e^{(x^2+y^2)} ds,$$

onde  $C$  é o pedaço do círculo de raio 2 com centro em  $(0, 0)$  acima do eixo  $x$ .

**Questão 4:** (2.5 pontos)

Seja  $C$  o contorno do retângulo  $[-1, 1] \times [-2, 2]$  orientado no sentido anti-horário. Determine

$$\int_C \left( \frac{y}{x^2 + y^2} - y \right) dx + \left( x - \frac{x}{x^2 + y^2} \right) dy.$$