

Instituto de Matemática - IM/UFRJ
Cálculo Diferencial e Integral III
1ª Prova. - 28/09/2023

Questão 1: (2.5 pontos)

Considere o domínio plano localizado no 1º quadrante e limitado por $x^2 + \frac{y^2}{3} = 1$, $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{9} = 1$, $y = 0$ e $y = x$.

- (a) [1.0] Escreva a integral dupla que define a área deste domínio na forma iterada em coordenadas cartesianas (x, y) .
- (b) [1.5] Usando uma mudança de variáveis apropriada, calcule a área deste domínio.

Questão 2: (2.5 pontos)

Calcule a integral tripla $\iiint_Q \frac{dV}{x^2 + y^2 + z^2}$

onde $Q = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 12; x^2 + y^2 + z^2 \geq 4z; z \geq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}} \right\}$.

Questão 3: (2.5 pontos)

Calcule a integral de linha escalar

$$\int_C (x^2 - y^2)e^{(x^2+y^2)} ds,$$

onde C é o pedaço do círculo de raio 2 com centro em $(0, 0)$ acima do eixo x .

Questão 4: (2.5 pontos)

Seja C o contorno do retângulo $[-1, 1] \times [-2, 2]$ orientado no sentido anti-horário. Determine

$$\int_C \left(\frac{y}{x^2 + y^2} - y \right) dx + \left(x - \frac{x}{x^2 + y^2} \right) dy.$$