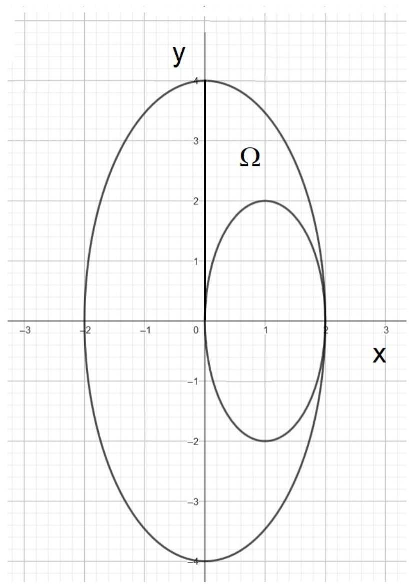
Gabarito da P-1 C-III 2023-1 © 2023 DM-IM-UFRJ

Questão 1. Seja $I = \int\limits_0^2 \int\limits_{2\sqrt{2x-x^2}}^{2\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dydx$. a) Trocar a ordem de integração da integral I; b) Escrever a inegral I em coordenadas polares (ρ, t), supondo que a origem do sistema de coordenadas polares coencide com a origem do sistema de coordenadas cartesianas e o ângulo polar se calcula no sentido anti–horário da parte positiva do eixo OX.

Resolução: Domínio de integração Ω:



a) Equações das curvas que definem o domínio de integração: $(x-1)^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1; \quad \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} = 1; \quad x = 0.$

$$I = \int\limits_0^2 \int\limits_0^{1-\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}} f(x,y)dxdy + \int\limits_0^2 \int\limits_{1+\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}}^{\sqrt{4-\frac{y^2}{4}}} f(x,y)dxdy + \int\limits_2^4 \int\limits_0^{\sqrt{4-\frac{y^2}{4}}} f(x,y)dxdy.$$

b) Mudança de variáveis: $x = \rho\cos t, \quad y = 2\rho \operatorname{sen} t$. $J(\rho,t) = 2\rho$. $I = 2\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_{2\cos t}^{2} f(x(\rho,t), y(\rho,t))\rho d\rho dt.$

Opcional: $x = 2\rho\cos t, \quad y = 4\rho \operatorname{sen} t$. $J(\rho,t) = 8\rho$. $I = 8\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_{\cos t}^{1} f(x(\rho,t), y(\rho,t))\rho d\rho dt.$

Questão 2. Calcule a integral efetuando uma mudança de variáveis apropriadas $\iint\limits_R e^{(x+y)}(x-y)^2 dA$, onde R é a região limitada pelo quadrado $|x+1| + |y+1| = 1$.

Resolução: Se $x+1 \geq 0$ e $y+1 \geq 0$, então $x+y=-1$; se $x+1 \geq 0$ e $y+1 \leq 0$, então $x-y=1$; se $x+1 \leq 0$ e $y+1 \geq 0$, então $x-y=-1$; se $x+1 \leq 0$ e $y+1 \leq 0$, então $x+y=-3$. Usamos a mudança $u := x+y, \ v := x-y$, assim $Q = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | -3 \leq u \leq -1, -1 \leq v \leq 1\}$. O Jacobiano $\dfrac{\partial(u.v)}{\partial(x,y)} = -2$, então $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -\dfrac{1}{2}$. Portanto

$$\iint\limits_R e^{x+y}(x-y)^2 dA = \int_{-1}^{1}\int_{-3}^{-1} e^u v^2 \left|-\frac{1}{2}\right| du dv = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(e^{-1}-e^{-3})v^2 dv = \frac{1}{2}(e^{-1}-e^{-3})\left[\frac{v^3}{3}\right]_{v=-1}^{v=1} = \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{e}-\frac{1}{e^3}\Big).$$

Questão 3. Calcule o volume do sólido V dado por $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \geq 1, x^2+y^2+(z-1)^2 \leq 1\}$.

Resolução: Usaremos as coordenadas esféricas. Podemos ver que $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Note que φ toma seu valor máximo na interseção das $x^2+y^2+z^2=1$ e $x^2+y^2+(z-1)^2=1$, isto é $(z-1)^2-z^2=0,\ -2z+1=0,\ \dfrac{1}{2}=\cos\varphi\ \varphi=\dfrac{\pi}{3}$, logo $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$. Agora de $x^2+y^2+z^2 \geq 1$, temos $1 \leq \rho$ e é acotado superiormente pela esfera $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ assim $(\rho\,\mathrm{sen}\varphi)^2+(\rho\cos\varphi-1)^2=1,\ \rho=2\cos\varphi$. Portanto $W=\Big\{(\rho,\theta,\varphi)|1\leq\rho\leq 2cos\varphi, 0\leq\theta\leq 2\pi, 0\leq\varphi\leq\dfrac{\pi}{3}\Big\}$.

Por ultimo Vol(V) $= \displaystyle\iiint\limits_W dxdydz = \int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_0^{2\pi}\int_1^{2\cos\varphi}\rho^2\,\mathrm{sen}\varphi d\rho d\theta d\varphi = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left[\rho^3\,\mathrm{sen}\varphi\right]_{\rho=1}^{\rho=2\cos\varphi} d\varphi =$

$$\frac{2\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(8\cos^3\varphi\,\mathrm{sen}\varphi - \mathrm{sen}\varphi)d\varphi = \frac{16\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^3\varphi\,\mathrm{sen}\varphi d\varphi + \frac{2\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}} -sen\varphi d\varphi = \frac{16\pi}{3}\left[\frac{-\cos^4\varphi}{4}\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{3}} + \frac{2\pi}{3}\left[cos\varphi\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{3}} = \frac{4\pi}{3}\left(1-\frac{1}{16}\right)+\frac{2\pi}{3}\left(\frac{1}{2}-1\right)=\frac{11\pi}{12}.$$

Questão 4. Calcule a integral de linha do campo vetorial $\displaystyle\int\limits_C (e^{-x}+y^2)\,dx+(e^{-y}+x^2)\,dy$. Onde contorno C consiste de um pedaço de curva de equação $y=cosx$, com ponto inicial $\Big(-\dfrac{\pi}{2},0\Big)$ e ponto final $\Big(\dfrac{\pi}{2},0\Big)$.

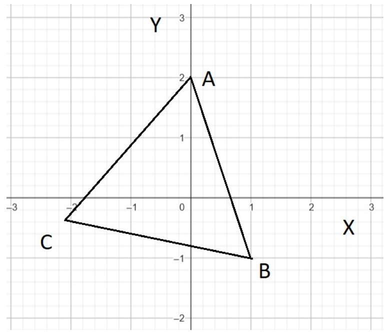
Resolução: Opção 1. $\sigma(x)=(x,\cos(x))\quad -\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}$. σ é uma função de classe C^1. $\sigma'(x)=(1,-\sin(x))$; $F(\sigma(x)) = (e^{-x}+\cos^2(x), e^{-\cos(x)}+x^2)$. Logo, $F(\sigma(x))\cdot\sigma'(x) = e^{-x}+\cos^2(x)-\sin(x)e^{-\cos(x)}-x^2\sin(x)$. Então,

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(\sigma(x))\cdot\sigma'(x)\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\,dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(x)\,dx - \cancelto{=0}{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)e^{-\cos(x)}\,dx} - \cancelto{=0}{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin(x)\,dx}.$$

Portanto, $\boxed{\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(\sigma(x))\cdot\sigma'(x)\,dx = e^{\frac{\pi}{2}}-e^{-\frac{\pi}{2}}+\frac{\pi}{2}}$.

Opção 2. Podemos redefinir o problema, adjuntando outra curva (segmento de reta), que liga os pontos $(-\frac{\pi}{2},0)$ e $(\frac{\pi}{2},0)$. Construímos assim, uma curva fechada simples $\partial D = C_1\cup C_2$, onde C_1 : O pedaço de curva $y=\cos(x)$. Parametrizado $\sigma(x)=(x,\cos(x))\quad -\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}$; Orientada no sentido horário. C_2 : O segmento que liga $(-\frac{\pi}{2},0)$ e $(\frac{\pi}{2},0)$. Parametrizado $\beta(x)=(-x,0)\quad -\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}$; Orientada no sentido horário. Claramente, ∂D é uma curva fechada simples, de classe C^1 (por partes) orientada no sentido horário. Logo, pelo Teorema de Green $\displaystyle\oint_{\partial D}\vec{F}\cdot d\vec{r} = -\iint_D\left[\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right]dA$. Pelas propriedades da integral de linha, $\int_{C_1}\vec{F}\cdot d\vec{r} = -\iint_D\left[\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right]dA + \int_{C_2^-}\vec{F}\cdot d\vec{r}$. Facilmente, podemos calcular $\displaystyle\left[\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right] = 2(x-y)$. Logo, $\displaystyle\iint_D\left[\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right]dA = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\cos(x)}(x-y)\,dy\,dx = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[xy-\frac{y^2}{2}\right]\Bigg|_0^{\cos(x)} dx = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[x\cos(x)-\frac{\cos^2(x)}{2}\right]dx = 2\cancelto{=0}{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)\,dx} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(x)\,dx = -\frac{\pi}{2}$.. Por outra parte, podemos calcular a segunda integral de linha direitamente. Isto é, $\displaystyle\int_{C_2^-}\vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(\beta(x))\cdot\beta'(x)\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\,dx = e^{\frac{\pi}{2}}-e^{-\frac{\pi}{2}}$. Por ultimo, temos que $\boxed{\displaystyle\int_{C_1}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \frac{\pi}{2}+e^{\frac{\pi}{2}}-e^{-\frac{\pi}{2}}}$

Questão 5. Seja Γ o contorno do triangulo equilátero com vertices $A(0,2)$ e $B(1,-1)$ e o terceiro vertice C localizado como aprenentado na Figura, orientado no centido anti-horário.



Encontrar $I = \int\limits_{\Gamma} \left(\dfrac{-4y}{x^2+y^2} - 3y \right) dx + \left(\dfrac{4x}{x^2+y^2} + 2x \right) dy.$

Resolução: Campo vetorial $F = \left(\dfrac{-4y}{x^2+y^2} - 3y, \;\; \dfrac{4x}{x^2+y^2} + 2x \right) = \left(\dfrac{-4y}{x^2+y^2}, \;\; \dfrac{4x}{x^2+y^2} \right) + \left(-3y, \;\; 2x \right) = F_s + F_r.$

Aplicando a Teorema de Green para F_r: $\int\limits_{\Gamma} F_r \cdot ds = 5 \cdot Area(ABC) = 5 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{4} |AB|^2 = \dfrac{25\sqrt{3}}{2}.$

Aplicando a Teorema de Green para F_s: $\int\limits_{\Gamma} F_s \cdot ds = 8\pi$, (ver Diomara, Ex. 6.9, p. 231, Edição 1997).

$$I = \frac{25\sqrt{3}}{2} + 8\pi.$$