Instituto de Matemática - IM/UFRJ
Cálculo Diferencial e Integral III
Prova Final. - 30/11/2023

Questão 1: (2.5 pontos)

Considere a integral iterada $\mathcal{I} := \int_0^2 \int_{y^2}^4 ye^{x^2} dxdy$.

(a) (0.5 ponto) Determine a região D do tipo II no plano xy tal que a integral $\mathcal{I}$ é expressa como uma integral dupla sobre D. Faça um esboço da região D.

(b) (0.5 ponto) Escreva D como uma região do tipo I e com isso expresse a integral $\mathcal{I}$ com a ordem de integração trocada.

(c) (1.0 ponto) Calcule a integral $\mathcal{I}$ usando a nova ordem de integração do item (b).

Solução:

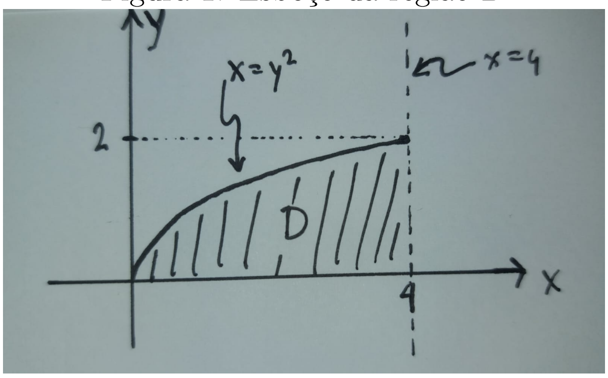
(a) A partir da ordem e dos limites de integração da integral iterada $\mathcal{I}$, temos que a região do tipo II dada por

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant y \leqslant 2, \quad y^2 \leqslant x \leqslant 4\}$$

é tal que

$$\mathcal{I} = \iint_D ye^{x^2} dA.$$

Figura 1: Esboço da região D



(b) A partir da descrição da região D dada no item (a), podemos ver D como uma região do tipo I da seguinte forma:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant 4, \quad 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}\}.$$

Assim,

$$\mathcal{I} = \iint_D ye^{x^2} dA = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} ye^{x^2} dydx.$$

(c) Usando (b), temos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} &= \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} y e^{x^2} dydx && (1)\\
&= \int_0^4 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=\sqrt{x}} e^{x^2} dx && (2)\\
&= \frac{1}{2}\int_0^4 x e^{x^2} dx && (3)\\
&= \frac{1}{4} e^{x^2}\Big|_0^4 && (4)\\
&= \frac{1}{4}(e^{16}-1). && (5)
\end{aligned}$$

Questão 2: (2.5 pontos)

Calcule o volume do sólido localizado entre o plano $z = 0$ e o parabolóide elíptico $z = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16}$ e dentro do cilindro $4x^2 + y^2 = 4$.

Solução. Faremos uma mudança de variaveis tal que $x^2 = r^2\cos^2\theta$ e $(y/2)^2 = r^2\sin^2\theta$. Ou seja, $(x, y, z) = (r\cos\theta, 2r\cos\theta, z)$ e

$$\det \frac{\partial\{x,y,z\}}{\partial\{r,\theta,z\}} = \det \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ 2\sin\theta & 2r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2r.$$

Como nas coordenadas novas, o sólido é definido por

$$Q = \{(r\cos\theta, 2r\cos\theta, z) : r \in [0,1], \theta \in [0, 2\pi], 0 \leq z \leq \frac{r^2}{4}\}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(S) &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{r^2/4} 2r\, dzd\theta dr \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{r^3}{2} d\theta dr = \pi \int_0^1 r^3 dr \\
&= \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Questão 3: (2.5 pontos)

Calcule a integral $\displaystyle\int_C F \cdot dr$, onde F é o campo

$$F = (2xy\cos(x^2) + ze^x, \mathrm{sen}(x^2) + \frac{2y}{y^2+1}, e^x)$$

e C é a interseção da semi-esfera $x^2+y^2+z^2=4,\ z\geq 0$ com o cilindro $x^2+y^2=2x$ contida na região $y\geq x$ e percorrida no sentido do decrescimento do x.

Resolução 1:

$F=\nabla\Phi$, onde $\Phi=y\,\mathrm{sen}(x^2)+ze^x+\ln(y^2+1)$.

Ponto inicial: $A(1,1,\sqrt{2})$, ponto final: $B(0,0,2)$.

$\displaystyle\int_C F\cdot dr=\Phi(B)-\Phi(A)=2-(\mathrm{sen}\,1+\sqrt{2}e+\ln 2)\approx -3,38.$

Resolução 2:

F é um campo sem singularidades. Além disso,

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}(F)&=(\partial_y(F_3)-\partial_z(F_2),\partial_z(F_1)-\partial_x(F_3),\partial_x(F_2)-\partial_y(F_1))\\&=\big(0,e^x-e^x,2x\cos x^2-2x\cos x^2\big)=(0,0,0)\end{aligned}$$

Daí, F é conservativo e $\int_C F\cdot ds$ somente depende do ponto inicial P e final Q. Para determinar estes pontos, basta fazer a interseção do plano $x=y$ com a esfero e o cilindro: Como $x^2+x^2=2x \iff x(x-1)=0$, $x=y=0$ ou $x=y=1$. Daí, $P=(0,0,2)$ e $Q=(1,1,\sqrt{2})$.

Para construir uma curva de P a Q, define

$$\begin{aligned}\gamma_1&:[\sqrt{2},2]\to\mathbb{R}^3,t\mapsto(0,0,t)\\\gamma_2&:[0,1]\to\mathbb{R}^3,t\mapsto(0,t,\sqrt{2})\\\gamma_3&:[0,1]\to\mathbb{R}^3,t\mapsto(t,1,\sqrt{2})\end{aligned}$$

e calcule, usando duas vezes a substituição $s=t^2$, $ds=2tdt$

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{2}}^2\langle F\circ\gamma_1,\gamma_1'\rangle dt&=\int_{\sqrt{2}}^2 e^0dt=2-\sqrt{2}=:I_1\\\int_0^1\langle F\circ\gamma_2,\gamma_2'\rangle dt&=\int_0^1\langle(\sqrt{2},\tfrac{2t}{t^2+1},1),(0,1,0)\gamma_1'\rangle dt\\&=\int_0^1\tfrac{2t}{t^2+1}dt=\int_0^1\tfrac{1}{s+1}ds=\ln 2-\ln 1=\ln 2=:I_2\\\int_0^1\langle F\circ\gamma_3,\gamma_3'\rangle dt&=\int_0^1\langle(2t\cos t^2+\sqrt{2}e^t,\sin t^2+1,e^t),(1,0,0)\gamma_1'\rangle dt\\&=\int_0^1 2t\cos t^2dt+\int_0^1\sqrt{2}e^tdt\\&=\int_0^1\cos ds+\sqrt{2}(e-1)=\sin 1+\sqrt{2}(e-1)=:I_3.\end{aligned}$$

Daí, ajustando a orientação, $\int_C F \cdot ds = -I_1 + I_2 + I_3 = -2 + \ln 2 + \sin 1 - \sqrt{2}e$.

Questão 4: (2.5 pontos)

Calcule o fluxo do campo vetorial

$$F(x,y,z) = (-\frac{y}{x^2+y^2+z^2}, \frac{x}{x^2+y^2+z^2}, 2z)$$

através da superfície S definida como o elipsóide $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} = 1$ com normal apontando para fora.

Solução. Observe que o campo tem uma singularidade em $(0,0,0)$, então não podemos aplicar o Teorema de Gauss no interior do elipsóide $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$. Iremos usar a esfera Σ, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, para isolar a singularidade e aplicar o Teorema de Gauss na região

$$Q = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} \leq 1,\ x^2 + y^2 + z^2 \geq 1\}.$$

Sua fronteira é $S \cup \Sigma$, com a normal em Σ apontando para dentro da esfera. O divergente do campo é

$$\operatorname{div}(F) = \frac{2xy}{(x^2 + y^+ z^2)^2} + \frac{-2xy}{(x^2 + y^+ z^2)^2} + 2 = 2.$$

Daí,

$$\iint_{S\cup\Sigma} F \cdot dS = \iiint_Q 2\, dx\, dy\, dz = 2(\text{vol(elipsóide)} - \text{vol(esfera)})$$
$$= 2(\frac{4}{3}\pi(2 \cdot 3 \cdot 2) - \frac{4}{3}\pi) = \frac{88\pi}{3}.$$

Isolando a integral sobre S, obtemos

$$\iint_S F \cdot dS = \frac{88\pi}{3} - \iint_\Sigma F \cdot dS.$$

Devemos, finalmente, calcular a o fluxo de F para dentro da esfera. Usando a normal unitária $n = (-x, -y, -z)$ na esfera, temos

$$\iint_\Sigma (F \cdot n) dS = -\iint_\Sigma 2z^2 dS = -\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} 2(cos(\varphi))^2 \operatorname{sen}(\varphi)\, d\varphi\, d\theta$$
$$= 4\pi\ (\frac{\cos^3(\varphi)}{3})\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} = -\frac{8\pi}{3},$$

onde usamos as coordenadas esféricas $x = \operatorname{sen}(\varphi)\cos(\theta), y = \operatorname{sen}(\varphi)\operatorname{sen}(\theta), z = \cos(\varphi)$. Daí,

$$\iint_S F \cdot dS = \frac{88\pi}{3} - (-\frac{8\pi}{3}) = 32\pi.$$