Instituto de Matemática - IM/UFRJ
Cálculo Diferencial e Integral III
$1^{\underline{a}}$ Prova. - 28/09/2023

Questão 1: (2.5 pontos)

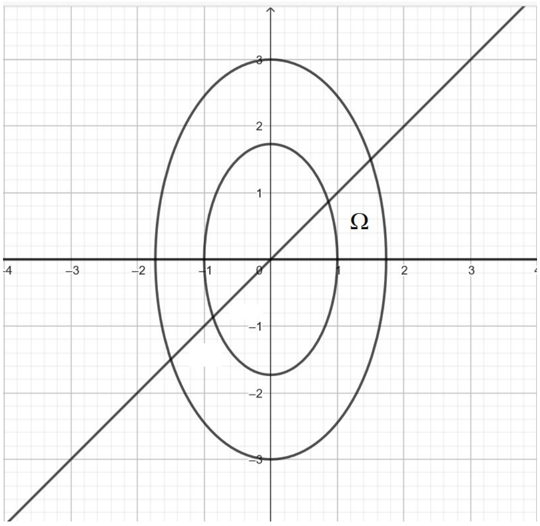
Considere o domínio plano localizado no $1^{\underline{o}}$ quadrante e limitado por $x^2 + \dfrac{y^2}{3} = 1$, $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{9} = 1$, $y = 0$ e $y = x$.

(a) [1.0] Escreva a integral dupla que define a área deste domínio na forma iterada em coordenadas cartesianas (x, y).

(b) [1.5] Usando uma mudança de variáveis apropriada, calcule a área deste domínio.

Resolução:

a) Domínio de integração Ω:



$$A(\Omega) = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} dx \int_{\sqrt{3}\sqrt{1-x^2}}^{x} dy + \int_{1}^{\frac{3}{2}} dx \int_{0}^{x} dy + \int_{\frac{3}{2}}^{\sqrt{3}} dx \int_{0}^{\sqrt{3}\sqrt{3-x^2}} dy.$$

b) Mudança de variáveis: $x = \rho\cos\theta,\ y = \sqrt{3}\rho\,\mathrm{sen}\,\theta.\ J(\rho,\theta) = \sqrt{3}\rho.$

$x^2 + \dfrac{y^2}{3} = 1 \Rightarrow \rho = 1$; $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow \rho = \sqrt{3}$; $y = 0 \Rightarrow \sqrt{3}\rho\,\mathrm{sen}\,\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$; $y = x \Rightarrow \rho\cos\theta = \sqrt{3}\rho\,\mathrm{sen}\,\theta \Rightarrow \tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{6}$ (1-o octante).

$$A(\Omega) = \sqrt{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} d\theta \int_{1}^{\sqrt{3}} \rho\, d\rho = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

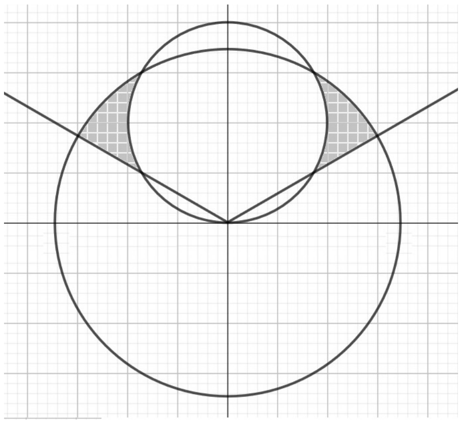
Questão 2: (2.5 pontos)

Calcule a integral tripla $\displaystyle\iiint_Q \frac{dV}{x^2+y^2+z^2}$

onde $Q = \left\{(x,y,z) \in R^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le 12;\ x^2+y^2+z^2 \ge 4z;\ z \ge \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}}\right\}$.

Resolução:

Projeção do domínio de integração V:



Mudança de variáveis: $x = \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta;\ y = \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta;\ z = \rho\cos\varphi$.

Limites de integração:

$x^2+y^2+z^2 = 12 \ \Rightarrow \rho_1 = 2\sqrt{3};$

$x^2+y^2+z^2 = 4z \ \Rightarrow \rho_2 = 4\cos\varphi;$

$\rho_1 = \rho_2 \ \Rightarrow \varphi_1 = \dfrac{\pi}{6};$

$z = \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}} \ \Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\varphi \ \Rightarrow \tan\varphi = \sqrt{3} \ \Rightarrow \varphi_2 = \dfrac{\pi}{3}.$

$$\iiint_V \frac{dV}{x^2+y^2+z^2} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{sen}\varphi d\varphi \int_{4\cos\varphi}^{2\sqrt{3}} d\rho = 4\sqrt{3}\pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{sen}\varphi d\varphi + 8\pi \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \operatorname{sen}\varphi d(\operatorname{sen}\varphi) =$$

$$4\sqrt{3}\pi\left(\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{3}\right) + 4\pi\left(\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{6} - \operatorname{sen}^2\frac{\pi}{3}\right) = 4\sqrt{3}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) + 4\pi\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right) =$$
$$6\pi - 2\pi\sqrt{3} - 2\pi = 4\pi - 2\pi\sqrt{3} =$$

$$= 2\pi(2-\sqrt{3}).$$

Questão 3: (2.5 pontos)

Calcule a integral de linha escalar

$$\int_C (x^2 - y^2)e^{(x^2+y^2)}\, ds,$$

onde C é o pedaço do círculo de raio 2 com centro em $(0,0)$ acima do eixo x.

Resolução:

Primeiramente, parametrizamos o círculo C por $\gamma(t) := (2\cos t, 2\sin t)$, $t \in [0,\pi]$. Note que:

(i) $\gamma'(t) = (-2\sin t, 2\cos t)$, para cada $t \in [0,\pi]$; em particular, γ é de classe C^1 e

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2} = 2, \quad \text{para cada } t \in [0,\pi].$$

(ii) $f(x,y) := (x^2 - y^2)e^{(x^2+y^2)}$ é contínua em todo plano xy e

$$f(\gamma(t)) = 4(\cos^2 t - \sin^2 t)e^{4(\cos^2 t + \sin^2 t)} = 4\cos(2t).e^4, \quad \text{para cada } t \in [0,\pi].$$

Portanto, usando (i) e (ii) temos que

$$\int_C (x^2 - y^2)e^{(x^2+y^2)} ds = \int_0^\pi f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\| dt \tag{1}$$

$$= \int_0^\pi (4e^4 \cos(2t)).2dt \tag{2}$$

$$= 8e^4.\frac{\sin 2t}{2}\Big|_0^\pi = 0. \tag{3}$$

Questão 4: (2.5 pontos)

Seja C o contorno do retângulo $[-1,1] \times [-2,2]$ orientado no sentido anti-horário. Determine

$$\int_C \left(\frac{y}{x^2+y^2} - y\right) dx + \left(x - \frac{x}{x^2+y^2}\right) dy.$$

Resolução:

Primeiramente, separa-se o campo vetorial em $\vec{F} = (-y, x)$ e $\vec{G} = (\frac{y}{x^2+y^2}, -\frac{x}{x^2+y^2})$. No primeiro caso, pode-se aplicar o teorema de Green:

$$\int_C \vec{F} \cdot ds = \iint_{[-1,1]\times[-2,2]} 1 + 1 dxdy = 16.$$

No segundo caso, **não pode-se aplicar o teorema de Green pois $\vec{G}$ não é diferenciável em** $(0,0)$. Mas, para $\gamma_a(t) := (a\cos t, a\sin t)$, $\gamma_a'(t) := (-a\sin t, a\cos t)$,

$$\int_0^{2\pi} \vec{G} \cdot \gamma'(t) dt = \int_0^{2\pi} \frac{-a^2\cos^2 t}{a^2} + \frac{-a^2 \sin^2 t}{a^2} dt = -2\pi,$$

onde $a > 0$ representa o raio do círculo parametrizado por γ_a.

A aplicação do teorema de Green para o campo vetorial $\vec{G}$ definido no retângulo menos uma bola de centro 1/2 centrada na origem, $D := ([-1,1] \times [-2,2]) \setminus B_{1/2}(0,0)$, nos dá que

$$\begin{aligned}\int_C \vec{G} \cdot ds + \int_{-\gamma_{1/2}} \vec{G} \cdot ds &= \iint_D \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} dxdy \\ &= \iint_D -\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} dxdy \\ &= 0.\end{aligned}$$

Portanto, $\int_C \vec{G} \cdot ds = \int_{\gamma_{1/2}} \vec{G} \cdot ds = -2\pi$. Daí, segue o resultado final

$$\int_C (\vec{F} + \vec{G}) \cdot ds = 16 - 2\pi$$