Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática
Departamento de Métodos Matemáticos
Lista de Parametrização de Superfícies de Cálculo III

1. Parametrize a porção do cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ compreendida entre os planos $z = 2x$ e $z = 4x$.

2. Considere o arco γ da parábola $z = 3 - y^2$, no plano yz, compreendido entre as semi-retas $z = 2y$ e $z = \frac{11y}{2}$, com $y \geq 0$. Seja S a superfície obtida girando-se γ em torno do eixo z. Parametrize S.

3. Seja S a superfície obtida girando-se a curva $z = x^2$, $0 \leq x \leq 4$, em torno do eixo z.
   - parametrize S.
   - parametrize a superfície S_1, que é a porção de S compreendida entre os cilindros $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.

4. Parametrize a parte da superfície $x^2 + y^2 = 2x$ limitada pelas superfícies $z = 0$ e $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

5. Parametrize a porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 12$ que **não** se encontra no interior do parabolóide $z = x^2 + y^2$.

6. Parametrize a superfície $x^2 + y^2 = 1$, limitada pelos planos $z = 1$ e $x + z = 4$.

7. Parametrize a superfície obtida girando-se a curva $z = 1 - x^2$, $0 \leq x \leq 1$, em torno do eixo x.

8. Seja $S = S_1 \cup S_2$, onde S_1 obtida rodando-se em torno do eixo z a curva C_1: $z = 1 - x$, $0 \leq x \leq 1$ e S_2 é obtida girando-se a curva $z = 0$, $0 \leq x \leq 1$, em torno de z. Parametrize S_1 e S_2.

9. Parametrize a porção de $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ entre as superfícies $z = 0$ e $z = 4$.

10. Parametrize a superfície de revolução S obtida girando-se o segmento de reta que liga $(1, 0, 1)$ a $(0, 0, 3)$, em torno do eixo Oz.

11. Parametrize a superfície S obtida girando-se o círculo $(x-a)^2+z^2 = b^2$, $0 < b < a$, em torno de Oz e encontre um vetor normal a S em cada ponto, utilizando-se esta parametrização.

12. Parametrize a porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ limitada por dois paralelos e dois meridianos, sabendo-se que o ângulo entre os dois meridianos é α e a distância entre os planos que contêm os paralelos é h.
    Sugestão: situe um dos paralelos no plano xy e um dos meridianos no plano xz e use a idéia das coordenadas esféricas.

13. Encontre uma parametrização para a superfície S do hiperbolóide $x^2+y^2-z^2 = 1$; encontre um vetor normal a S em cada ponto, utilizando esta parametrização e encontre a equação do plano tangente a S no ponto $(1/2, \sqrt{3}/2, 0)$.

Respostas da Lista:

1. $\sigma_1(u,v) = (a\cos(u), a\,\text{sen}\,(u), v)$, $-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$ e $2a\cos(u) \leq v \leq 4a\cos(u)$; $\sigma_2(u,v) = (a\cos(u), a\,\text{sen}\,(u), v)$, $\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{3\pi}{2}$ e $4a\cos(u) \leq v \leq 2a\cos(u)$

2. $\sigma(u,v) = (u\cos(v), u\,\text{sen}\,(v), 3-u^2)$, $0 \leq v \leq 2\pi$; $\frac{1}{2} \leq u \leq 1$.

3. $\sigma(u,v) = (u\cos(v), u\,\text{sen}\,(v), u^2)$,$0 \leq v \leq 2\pi$; $0 \leq u \leq 4$ e $\sigma(u,v) = (u\cos(v), u\,\text{sen}\,(v), u^2)$,$0 \leq v \leq 2\pi$; $1 \leq u \leq 2$

4. $\sigma(u,v) = (1+\cos(u),\ \text{sen}\,(u), v)$; $0 \leq u \leq 2\pi$, $0 \leq v \leq 2|\cos(u/2)|$

5. $\sigma(\varphi,\theta) = (\sqrt{12}\,\text{sen}\,(\varphi)\cos(\theta), \sqrt{12}\,\text{sen}\,(\varphi)\,\text{sen}\,(\theta), \sqrt{12}\cos(\varphi))$; $0 \leq \theta \leq 2\pi$; $\pi/6 \leq \varphi \leq \pi$.

6. $\sigma(u,v) = (\cos(u),\ \text{sen}\,(u), v)$; $0 \leq u \leq 2\pi$; $1 \leq v \leq 4-\cos(u)$

7. $\sigma(u,v) = (u, (1-u^2)\cos(v), (1-u^2)\,\text{sen}\,(v))$, $0 \leq v \leq 2\pi$; $0 \leq u \leq 1$

8. $\sigma_1(u,v) = (u\cos(v), u\,\text{sen}\,(v), 1-u)$, $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 2\pi$; $\sigma_2(u,v) = (u\cos(v), u\,\text{sen}\,(v), 0)$, mesmos intervalos de variação de parâmetros.

9. $\sigma(u,v) = (1+\cos(u), 1+\ \text{sen}\,(u), v)$;$0 \leq u \leq 2\pi$, $0 \leq v \leq 4$

10. $\sigma(u,v) = (u\cos(v), u\,\text{sen}\,(v), 3-2u)$; $0 \leq v \leq 2\pi$; $0 \leq u \leq 1$

11. $\sigma(u,v) = ((a+b\cos(u))\cos(v), (a+b\cos(u))\,\text{sen}\,(v), b\,\text{sen}\,(u))$; $0 \leq u,v \leq 2\pi$ e $\vec{N} = (a+b\cos(u))(b\cos(u)\cos(v), b\cos(u)\,\text{sen}\,(v), b\,\text{sen}\,(u))$

12. $\sigma(\varphi,\theta) = (a\,\text{sen}\,(\varphi)\cos(\theta), a\,\text{sen}\,(\varphi)\,\text{sen}\,(\theta), a\cos(\varphi))$, $0 \leq \theta \leq \alpha$ e $\arccos(h/a) \leq \varphi \leq \pi/2$.