



Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática. Departamento de Matemática

Disciplina: Cálculo Diferencial e Integral III. MAC 238

Unidades: Institutos - E.Química - E.Politécnica

© DM.IM.UFRJ - 2022.

Prova Final (PF). Unificada

Turma: UNIFICADO

Data: 26/07/2022

Nota: A prova tem uma duração de duas horas.

Questão 1 (2, 5 p).- Calcule a integral

$$\iint_D \arctan\left(\frac{y}{x}\right) dA,$$

onde a região $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9, 0 \leq y \leq x\}$.

Questão 2 (2, 5 p).- Calcule a integral tripla $\iiint_W z^2 dV$, onde

$$W = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 16, x^2 + y^2 + z^2 \geq 4z \text{ e } 0 \leq z \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}} \right\}.$$

Questão 3 (2, 5 p).- Considere o campo $\mathbf{F} = (P, Q) = (x^2 + x + a^2y^2, y^2 + 2axy)$ com $a \in \mathbf{R}$. Usando Green, resolva as seguintes questões :

a) Desenhe a região Ω limitada por $2x + y = 4$, $x = 1$ e $y = 0$ e selecione uma parametrização orientada positivamente para seu contorno γ (ou γ orientada anti-horariamente).

b) Determine os valores do parâmetro a de modo que a integral $\int_{\gamma} Pdx + Qdy = 0$.

c) Calcule a integral de linha do campo para o valor $a = 2$.

$$\int_{\gamma} Pdx + Qdy$$

Questão 4 (2, 5 p).- Calcule a integral de superfície de campo vetorial $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$, onde a superfície S é dada pela equação

$$x^2 + y^2 = z^2 \left(1 + 3 \left(\cos \left(\frac{\pi z}{2} \right) \right)^2 \right), \quad 1 \leq z \leq 3,$$

orientada com vetor normal apontando para fora do eixo z e \mathbf{F} é o campo vetorial:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x, y, z).$$

(Observação: S é uma superfície de revolução que contém o cone $x^2 + y^2 = z^2$, $1 \leq z \leq 3$, em seu interior e coincide com ele nos planos $z = 1$ e $z = 3$)

Boa Prova ! \square