Instituto de Matemática - IM/UFRJ
Cálculo Diferencial e Integral III - MAC238
Prova Final Unificada - Escola Politécnica / Escola de Química - 13/12/2022

TEMPO DE PROVA: 02:00 hrs

Questão 1: (2.0 pontos)

Calcule a integral de linha do campo vetorial $\vec{F}(x, y, z) = (2y, 3xz, 2z^2)$ ao redor da curva C que é a fronteira do triângulo dado no primeiro octante pela interseção do plano $2x + y + z = 1$ com os planos coordenados, com orientação no sentido horário quando visto da origem.

Questão 2: (2.0 pontos)

Calcule a integral $\int_C F \cdot dr$ onde $F(x, y, z) = (e^x \operatorname{sen} y, e^x \cos y, z^2)$ e C é a curva parametrizada por $r(t) = \left(\sqrt{t}, t(t-1)^3, e^{\sqrt{t}}\right)$, com $0 \leq t \leq 1$.

Questão 3: (2.0 pontos)

Calcule $I = \int\limits_V z\sqrt{x^2 + y^2} dV$ onde o domínio $V := \{(x, y, z) \in R^3 \mid x^2 + y^2 \leq 2x,\ y \geq 0,\ 0 \leq z \leq a\}$ e $a > 0$.

Questão 4: (2.0 pontos)

Considere o campo vetorial dado por $F(x, y) = \left(e^{2\sin(x)-1} + 2y, 4x - \frac{2}{1+(\cos(y))^2}\right)$ e a elipse $\mathfrak{E}$ de equação

$$\mathfrak{E} : \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1.$$

Encontre o trabalho realizado pelo campo F sobre uma partícula que se desloca uma vez no sentido anti-horário na elipse $\mathfrak{E}$.

Questão 5: (2.0 pontos)

Considere a região

$$\mathcal{D}(t) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{(x-y)^2}{[(t^2+1)]^2} + \frac{(x+y)^2}{e^{2t}} \leq 1 \right\}.$$

Seja

$$\mathcal{A}(t) = \int\int_{\mathcal{D}(t)} dxdy,$$

a área de $\mathcal{D}(t)$. Calcule

$$\mathcal{A}(t) \text{ e } \mathcal{A}'(t).$$

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.