Instituto de Matemática - IM/UFRJ
Cálculo Diferencial e Integral III 2024.1 - MAC238
Gabarito prova final unificada - Escola Politécnica / Escola de Química - 04/07/2024

TEMPO DE PROVA: 2h

Justifique todas as suas respostas e apresente seus cálculos.

Questão 1: (2.5 pontos)
Considere a soma

$$I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{\frac{x}{2}}} f(x,y)dy\,dx + \int_1^2 \int_{\sqrt{x-1}}^{\sqrt{\frac{x}{2}}} f(x,y)dy\,dx.$$

(a) Expresse a soma das integrais como uma única integral dupla invertendo a ordem de integração.

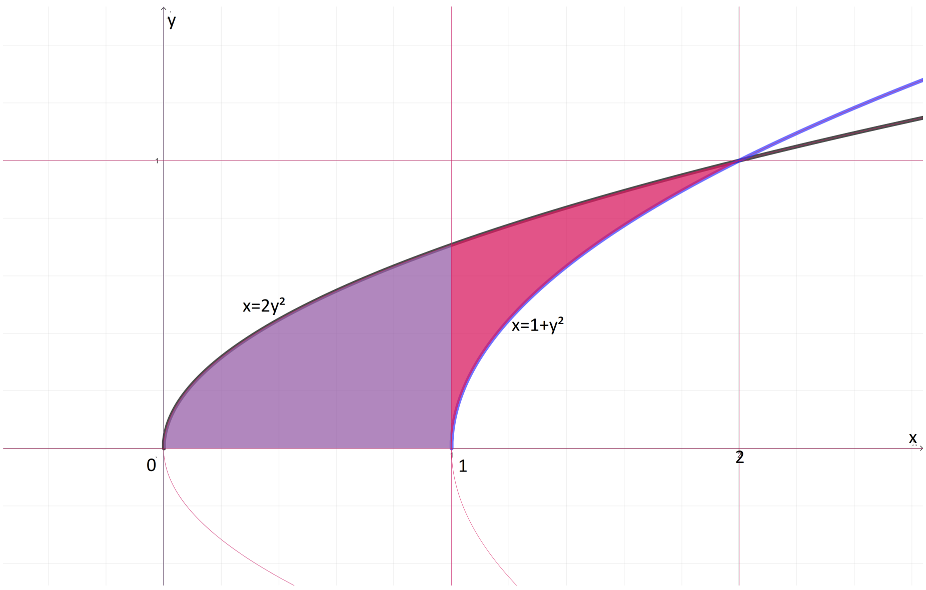
(b) Calcule I com a função $f(x,y) = \dfrac{1}{1+y(3-y^2)}$.

Solução:

(a) Escrevemos $I = I_1 + I_2$, onde I_1 e I_2 correspondem à primeira e a segunda integral do lado direito, respectivamente.

A primeira integral corresponde à região D_1 limitada pelas curvas $x=0$, $x=1$, $y=0$ e $y=\sqrt{\frac{x}{2}}$. Esta última é equivalente a $x=2y^2$ com $y \geq 0$.

A segunda integral, I_2, corresponde à região D_2 do plano limitada pelas curvas $x=1$, $x=2$, $y=\sqrt{x-1}$ e $y=\sqrt{\frac{x}{2}}$. As duas últimas, correspondem às curvas $x=1+y^2$ e $x=2y^2$ com $y \geq 0$, respectivamente. Note que D_1 e D_2 tem a curva $x=1$ com $0 \leq y \leq \sqrt{\frac{x}{2}}$ em comúm.



Juntando as duas regiões D_1 e D_2 obtemos a região $D = D_1 \cup D_2$ do plano limitada pelas curvas $y=0$, $y=1$, $x=2y^2$ e $x=1=y^2$. Isto é,

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1\,,\, 2y^2 \leq x \leq 1+y^2\}.$$

Assim,

$$I = \int_0^1 \int_{2y^2}^{1+y^2} f(x,y)dx\,dy.$$

(b) Fazemos $f(x,y) = \dfrac{1}{1+y(3-y^2)}$ e calculamos

$$I = \int_0^1 \int_{2y^2}^{1+y^2} \frac{1}{1+y(3-y^2)} dx\, dy = \int_0^1 \frac{1-y^2}{1+y(3-y^2)} dy$$

Fazendo a substituição $u = 1 + y(3-y^2)$, obtemos $du = 3(1-y^2)dy$. Logo,

$$\begin{aligned} I &= \int_1^3 \frac{1}{u} \frac{du}{3} \\ &= \frac{1}{3} \ln(u)\Big|_{u=1}^{3} = \frac{\ln(3)}{3}. \end{aligned}$$

Questão 2: (2.5 pontos)

Seja $D \subset \mathbb{R}^3$ o domínio limitado pelos paraboloides definidos por $z = 4-x^2-4y^2$ e $z = 4-4x^2-16y^2$ e a superfície $x^2+4y^2 = 4$. Calcule

$$\iiint_D e^{(x^2+4y^2)^2} dxdydz.$$

Solução:

Seja $(x,y,z) = (r\cos\theta, (r\sin\theta)/2, z) =: F(r,\theta,z)$. O Jacobiano de F é

$$\det D(F) = \det \begin{pmatrix} \cos\theta & (\sin\theta)/2 & 0 \\ -r\sin\theta & (r\cos\theta)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r/2.$$

O domínio em (r,θ,z) é limitado por $z = 4-r^2$, $z = 4-4r^2$ e $r^2 = 4$. Ou seja, o domínio E de integração é

$$E = \{(r,\theta,z) : 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le r \le 2, 4-4r^2 \le z \le 4-r^2\}.$$

Pela formula da mudança de variáveis,

$$\iiint_D e^{(x^2+4y^2)^2} dxdydz = \frac{1}{2}\int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_{4-4r^2}^{4-r^2} re^{r^4} dzd\theta dr.$$

Pela substituição $t = r^4$, $dt = 4r^3du$, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_{4-4r^2}^{4-r^2} re^{r^4} dzd\theta dr &= \pi \int_0^2 3r^3 e^{r^4} dr \\ &= \frac{3}{4}\pi \int_0^{16} e^t dt = \frac{3}{4}\pi\left(e^{16}-1\right). \end{aligned}$$

Questão 3: (2.5 pontos)

Seja S a superfície em $\mathbb{R}^3$ tal que $y^2 + z^2 = 2$ e $-1 \leq x \leq 1$ e

$$F(x, y, z) := (x^2yz + 1, y^2z(1 - x), z - z^2y).$$

Determine $\iint_S F \cdot dA$ em relação com o vetor normal apontando à direção do eixo x.

Solução:

Seja $W := \{(x, y, z) : -1 \leq x \leq 1, y^2 + z^2 \leq 2\}$. Então, ∂W consiste em 3 partes: S, $T_1 := \{(1, x, y) : x^2 + y^2 \leq 2\}$ e $T_{-1} := \{(-1, x, y) : x^2 + y^2 \leq 2\}$. Além disso,

$$\mathrm{div} F = 2xyz + 2yz - 2xyz + 1 - 2zy = 1.$$

Daí, pelo teorema de Gauss,

$$\mathrm{vol}(W) = \iiint_W \mathrm{div} F dV = \iint_S F \cdot n\, dS + \iint_{T_1} F \cdot n\, dS + \iint_{T_{-1}} F \cdot n\, dS,$$

onde as superfícies são orientadas para fora. Em relação à orientação de S dada na questão,

$$\iint_S F \cdot n\, dS = \iint_{T_1} F \cdot n\, dS + \iint_{T_{-1}} F \cdot n\, dS - \mathrm{vol}(W) = \iint_{T_1} F \cdot n\, dS + \iint_{T_{-1}} F \cdot n\, dS - 4\pi.$$

Para determinar $\iint_{T_1} F \cdot n\, dS + \iint_{T_{-1}} F \cdot n\, dS$:

$$\iint_{T_{\pm 1}} F \cdot n\, dS = \iint_{T_{\pm 1}} \langle F, (\pm 1, 0, 0)\rangle dS = \pm \iint (yz + 1) dS.$$

Ou seja, $\iint_{T_1} F \cdot n\, dS + \iint_{T_{-1}} F \cdot n\, dS = 0$. Daí, $\iint_S F \cdot n\, dS = -4\pi$.

E explicitamente, para T_1: Seja $\varphi(r, \theta) = (1, r\cos\theta, r\sin\theta)$ para $r \in [0, \sqrt{2}]$ e $\theta \in [0, 2\pi]$. Então,

$$\partial_r \varphi \times \partial_\theta \varphi = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = (r, 0, 0).$$

Em particular, $\partial_r \varphi \times \partial_\theta \varphi$ é orientada para fora, em relação com W. Daí,

$$\begin{aligned}
\iint_{T_1} F \cdot n\, dS &= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \langle (r^2 \cos\theta \sin\theta + 1, \cdots)(r, 0, 0)\rangle d\theta dr \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} (r^3 \cos\theta \sin\theta + r) d\theta dr \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{2}} r^3 dr \int_0^{2\pi} \sin 2\theta d\theta + 2\pi \frac{r^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{2}} = 2\pi.
\end{aligned}$$

Para T_{-1}: Seja $\varphi(r,\theta) = (-1, r\cos\theta, r\sin\theta)$ para $r \in [0,\sqrt{2}]$ e $\theta \in [0, 2\pi]$. Então,

$$\partial_r\varphi \times \partial_\theta\varphi = \det\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = (r, 0, 0).$$

Em particular, $\partial_r\varphi \times \partial_\theta\varphi$ é orientada para dentro, em relação com W. Daí,

$$\begin{aligned} -\iint_{T_{-1}} F \cdot n\, dS &= \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} \langle (r^2\cos\theta\sin\theta + 1, \cdots)(r,0,0)\rangle d\theta dr \\ &= \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} (r^3\cos\theta\sin\theta + r) d\theta dr \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{2}} r^3 dr \int_0^{2\pi} \sin 2\theta d\theta + 2\pi\frac{r^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{2}} = 2\pi. \end{aligned}$$

Questão 4: (2.5 pontos)

Seja Γ dado por $\gamma(t) := (\cos\theta, \sin\theta, e^\theta)$, com $\theta \in [0, 2\pi]$, e

$$F := \left(\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \frac{1}{z^2} \right).$$

(a) Determine as singularidades de F.

(b) Determine rot$F$.

(c) Determine $\int_\Gamma F \cdot ds$.

Solução:

(a) F não é definido se $x^2 + y^2 = 0$ ou $z = 0$. Como $x^2 + y^2 = 0$ se e somente $x = y = 0$, obtém-se que $\{(x,y,z) : x = y = 0 \text{ ou } z = 0\}$ são as singularidades de F.

(b) Por calculo direto, para (x,y,z) não pertencente ao conjunto das singularidades,

$$\begin{aligned} \text{rot}F &= \det\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}^3} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}^3} & \frac{1}{z^2} \end{pmatrix} \\ &= (0, 0, y\frac{\frac{-3}{2}2x}{\sqrt{x^2+y^2}^5} - x\frac{\frac{-3}{2}2y}{\sqrt{x^2+y^2}^5}) = (0,0,0) \end{aligned}$$

(c) Primeiro, tem-se que analisar a curva Γ: Pela parametrização, Γ é um subconjunto do cilindro $x^2 + y^2 = 4$, e a coordenada z de γ pertence ao interval $[1, e^{2\pi}]$. Além disso, $\gamma(0) = (1, 0, 1)$ e $\gamma(2\pi) = (1, 0, e^{2\pi})$.

Para aplicar o teorema de Stokes: Seja S a superfície limitada por Γ, $z = 1$ e a reta vertical $x = 1, y = 0$, orientado em direção do eixo z. Então, ∂S é a união de Γ e das curvas parametrizadas por $\sigma(t) = (1, 0, t)$, $t \in [1, \exp(2\pi)]$ e $\tau(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 1)$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

Para aplicar o teorema de Stokes, precisamos de analisar as orientações das curvas: σ e τ tem orientação negativa. Daí, por Stokes,

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma F \cdot ds &= \iint_S \mathrm{rot} F \cdot n\, dS + \int_1^{e^{2\pi}} \langle F \circ \sigma, \sigma' \rangle dt + \int_0^{2\pi} \langle F \circ \tau, \tau' \rangle d\theta \\
&= \iint_S 0 \cdot n\, dS + \int_1^{e^{2\pi}} t^{-2} dt \\
&\quad + \int_0^{2\pi} \langle (\cos\theta, \sin\theta, 1), (-\sin\theta, \cos\theta, 0) \rangle d\theta \\
&= \int_1^{e^{2\pi}} t^{-2} dt = -t^{-1}\Big|_1^{e^{2\pi}} = 1 - e^{-2\pi}
\end{aligned}$$